

Devoir surveillé n°2 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 2 : trigonométrie, barycentre, suites, rotation

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 4 + 5 + 6 + 5 points. Toute réponse doit être justifiée.

Calcul trigonométrique

Exercice 1 (4 points).

1. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (on remarquera que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$). (1 pt)
2. Montrer que pour tout réel x : $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos(4x)}{8}$. (1 pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(2x) - \cos x = 0$. (1 pt)
4. (a) Écrire $\sqrt{3} \cos x + \sin x$ sous la forme $R \cos(x - \varphi)$ avec $R > 0$.
(b) Résoudre dans $] -\pi, \pi]$ l'équation : $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$. (1 pt)

Barycentre et produit scalaire

Exercice 2 (5 points). Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis montrer que $BC = \sqrt{19}$. (1 pt)
2. Montrer que $AI = \frac{7}{2}$. (1 pt)
3. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$. Montrer que G est le milieu de $[AI]$ et exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. (1 pt)
4. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 7$. Vérifier que $A \in (E)$. (1 pt)
5. Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$. (1 pt)

Suites numériques

Exercice 3 (6 points). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 2 < u_n \leq 5$. (1 pt)
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante. Que peut-on en déduire sur (u_n) ? (1 pt)
4. On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . (1,5 pt)
5. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : S_n = 2n + 8 - \frac{3}{2^n}$. (1 pt)
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n - 2 \leq 10^{-3}$. (1 pt)

La rotation dans le plan

Exercice 4 (5 points). Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit r la rotation de centre $\Omega(1; 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout point $M(x; y)$, on note $M'(x'; y') = r(M)$.

1. Montrer que l'expression analytique de r est : $x' = 3 - y$ et $y' = x + 1$. (1 pt)
2. Soit $A(3; 1)$. Déterminer les coordonnées du point $A' = r(A)$ et vérifier que $\Omega A' = \Omega A$. (1 pt)
3. Soit (D) la droite d'équation $x + 2y - 3 = 0$. Déterminer une équation de la droite $(D') = r((D))$, puis vérifier que (D') est perpendiculaire à (D) . (1 pt)
4. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Déterminer une équation du cercle $r((\mathcal{C}))$. (0,5 pt)
5. Donner l'expression analytique de $r \circ r$ et préciser la nature de cette transformation. (0,5 pt)
6. (a) Montrer que pour tout point M du plan : $MM'^2 = 2\Omega M^2$.
(b) Déterminer les points M de la droite (D) tels que $MM' = 2\sqrt{2}$. (1 pt)