

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2 : trigonométrie, barycentre, suites, rotation

Calcul trigonométrique

Solution 1.

1. D'après la formule d'addition $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{donc } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

2. Pour tout réel x , $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$ (formule de duplication), donc $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x)$. Par linéarisation, $\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$. D'où

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos(4x)}{2} = \frac{1 - \cos(4x)}{8}.$$

3. L'équation s'écrit $\cos(2x) = \cos x$. Or $\cos a = \cos b \iff (a = b + 2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Donc

$$\cos(2x) = \cos x \iff (2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -x + 2k\pi) \iff \left(x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}\right),$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $2k\pi = \frac{2(3k)\pi}{3}$, les solutions de la forme $2k\pi$ sont déjà de la forme $\frac{2k\pi}{3}$. L'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(On peut aussi factoriser : $\cos(2x) - \cos x = -2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, ce qui redonne le même ensemble.)

4. (a) $R = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin x \right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
 (b) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff \left(x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, soit $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans $] -\pi, \pi]$, seules les valeurs $k = 0$ conviennent :

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}.$$

Barycentre et produit scalaire

Solution 2.

$$1. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A} = 3 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{15}{2}.$$

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc

$$BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2 = 25 - 15 + 9 = 19,$$

d'où $BC = \sqrt{19}$ (c'est le théorème d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \hat{A}$).

$$2. \text{ Théorème de la médiane dans le triangle } ABC, I \text{ étant le milieu de } [BC] : AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}. \text{ Donc } 9 + 25 = 2AI^2 + \frac{19}{2}, \text{ soit } 2AI^2 = 34 - \frac{19}{2} = \frac{49}{2} \text{ et } AI^2 = \frac{49}{4}. \text{ Comme } AI > 0 : AI = \frac{7}{2}.$$

(Autre méthode : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, donc $AI^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2) = \frac{1}{4}(9 + 15 + 25) = \frac{49}{4}$.)

$$3. \text{ Le point } I \text{ est le barycentre de } (B, 1) \text{ et } (C, 1) \text{ (milieu de } [BC]), \text{ et } 1 + 1 = 2 \neq 0. \text{ Par associativité du barycentre, } G \text{ est le barycentre de } (A, 2) \text{ et } (I, 2), \text{ donc, par homogénéité, de } (A, 1) \text{ et } (I, 1) : G \text{ est le milieu de } [AI].$$

Par suite $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

(Vérification directe : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donne, avec Chasles depuis A , $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.)

$$4. \text{ Pour tout point } M, \text{ par la propriété de réduction } (2 + 1 + 1 = 4 \neq 0) : 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}. \text{ Donc}$$

$$M \in (E) \iff \|4\overrightarrow{MG}\| = 7 \iff MG = \frac{7}{4}.$$

(E) est le **cercle de centre G et de rayon $\frac{7}{4}$** . Or $AG = \frac{1}{2}AI = \frac{7}{4}$, donc $A \in (E)$.

$$5. \text{ Pour tout point } M : \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \text{ (} I \text{ milieu de } [BC]). \text{ Donc}$$

$$M \in (F) \iff 4\overrightarrow{MG} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \iff \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MI} = 0.$$

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$ est le **cercle de diamètre $[GI]$** (les points G et I en font partie). Son centre est le milieu de $[GI]$ et son rayon vaut $\frac{GI}{2} = \frac{AI}{4} = \frac{7}{8}$.

Suites numériques

Solution 3.

$$1. u_1 = \frac{1}{2} \times 5 + 1 = \frac{7}{2} \text{ et } u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + 1 = \frac{11}{4}.$$

$$2. \text{ Soit } P(n) \text{ la propriété « } 2 < u_n \leq 5 \text{ »}.$$

Initialisation. $u_0 = 5$ et $2 < 5 \leq 5 : P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 < u_n \leq 5$. En multipliant par $\frac{1}{2} > 0$ puis en ajoutant $1 : 1 < \frac{1}{2}u_n \leq \frac{5}{2}$, puis $2 < \frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{7}{2}$. Comme $\frac{7}{2} \leq 5$, on obtient $2 < u_{n+1} \leq 5 : P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $2 < u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$3. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = \frac{2 - u_n}{2}. \text{ D'après la question 2, } u_n > 2, \text{ donc } 2 - u_n < 0 \text{ et } u_{n+1} - u_n < 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Elle est de plus minorée par 2 (et majorée par $u_0 = 5$) : (u_n) est **bornée** et décroissante.

4. (a) Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

(b) $v_n = v_0 q^n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{2^n}$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 + \frac{3}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 5.
- $S_n = \sum_{k=0}^n (2 + v_k) = 2(n+1) + (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$
- . Somme des termes d'une suite géométrique de raison
- $\frac{1}{2} \neq 1$
- :

$$v_0 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3 \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 6 - \frac{6}{2^{n+1}} = 6 - \frac{3}{2^n}.$$

Donc $S_n = 2n + 2 + 6 - \frac{3}{2^n} = 2n + 8 - \frac{3}{2^n}$. (Contrôle : $S_0 = 8 - 3 = 5 = u_0$ et $S_1 = 10 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2} = 5 + \frac{7}{2}$.)

- 6.
- $u_n - 2 = \frac{3}{2^n}$
- , donc
- $u_n - 2 \leq 10^{-3} \iff \frac{3}{2^n} \leq \frac{1}{1000} \iff 2^n \geq 3000$
- . Or
- $2^{11} = 2048 < 3000$
- et
- $2^{12} = 4096 \geq 3000$
- ; la suite
- (2^n)
- étant strictement croissante, l'inégalité
- $2^n \geq 3000$
- est vraie si et seulement si
- $n \geq 12$
- . Le plus petit entier cherché est
- $n = 12$
- .

La rotation dans le plan

Solution 4.

1. Pour une rotation de centre
- $\Omega(a; b)$
- et d'angle
- θ
- :
- $x' = a + (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta$
- et
- $y' = b + (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta$
- . Ici
- $a = 1$
- ,
- $b = 2$
- ,
- $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
- et
- $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- , donc

$$x' = 1 - (y - 2) = 3 - y, \quad y' = 2 + (x - 1) = x + 1.$$

- 2.
- $A(3; 1)$
- donne
- $x' = 3 - 1 = 2$
- et
- $y' = 3 + 1 = 4$
- :
- $A'(2; 4)$
- .

$\Omega A = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et $\Omega A' = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. On a bien $\Omega A' = \Omega A$ (la rotation conserve les distances au centre).

3. Soit
- $M'(x'; y')$
- un point du plan et
- $M(x; y)$
- son antécédent par
- r
- . D'après la question 1,
- $x = y' - 1$
- et
- $y = 3 - x'$
- . Alors

$$M' \in (D') \iff M \in (D) \iff (y' - 1) + 2(3 - x') - 3 = 0 \iff -2x' + y' + 2 = 0.$$

Donc $(D') : 2x - y - 2 = 0$. (Contrôle : $P(3; 0) \in (D)$ a pour image $P'(3; 4)$ et $2 \times 3 - 4 - 2 = 0$.)

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-2; 1)$ (car $\vec{n}(1; 2)$ est normal à (D)) et un vecteur directeur de (D') est $\vec{u}'(1; 2)$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{u}' = -2 + 2 = 0$, les droites (D) et (D') sont perpendiculaires, ce qui est cohérent avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 4.
- $(\mathcal{C})$
- est le cercle de centre
- $A(3; 1)$
- et de rayon 2. L'image d'un cercle par une rotation est le cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre :
- $r((\mathcal{C}))$
- est le cercle de centre
- $A'(2; 4)$
- et de rayon 2, d'équation

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4.$$

5. En appliquant deux fois les formules :
- $x'' = 3 - y' = 3 - (x + 1) = 2 - x$
- et
- $y'' = x' + 1 = (3 - y) + 1 = 4 - y$
- . Ainsi
- $r \circ r$
- est la rotation de centre
- Ω
- et d'angle
- $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$
- , c'est-à-dire la
- symétrie centrale de centre Ω**
- : on vérifie que le milieu de
- $[MM'']$
- est
- $\left(\frac{x+2-x}{2}, \frac{y+4-y}{2}\right) = (1; 2) = \Omega$
- .

6. (a) Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$ et l'égalité $0 = 0$ est vraie. Sinon, $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{2}$: le triangle $\Omega M M'$ est rectangle et isocèle en Ω , donc par le théorème de Pythagore $MM'^2 = \Omega M^2 + \Omega M'^2 = 2\Omega M^2$.

(Vérification analytique : $MM'^2 = (3 - y - x)^2 + (x + 1 - y)^2$; en posant $a = x - 1$ et $b = y - 2$, on a $3 - x - y = -(a + b)$ et $x + 1 - y = a - b$, d'où $MM'^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 2\Omega M^2$.)

- (b) $MM' = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow MM'^2 = 8 \Leftrightarrow \Omega M^2 = 4 \Leftrightarrow \Omega M = 2$: les points cherchés sont les points communs à (D) et au cercle de centre Ω et de rayon 2. Pour $M(x; y) \in (D)$, $x = 3 - 2y$, et

$$\Omega M^2 = 4 \Leftrightarrow (2 - 2y)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 4 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 144 - 80 = 64 = 8^2$, d'où $y = \frac{12+8}{10} = 2$ ou $y = \frac{12-8}{10} = \frac{2}{5}$, puis $x = 3 - 4 = -1$ ou $x = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$. Il y a deux points : $M_1(-1; 2)$ et $M_2(\frac{11}{5}; \frac{2}{5})$. (Contrôle : $\Omega M_2^2 = (\frac{6}{5})^2 + (-\frac{8}{5})^2 = \frac{36}{25} + \frac{64}{25} = 4$.)