

Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1 : logique, ensembles, fonctions

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 6 + 9 points. Toute réponse doit être justifiée.

Logique mathématique

Exercice 1 (5 points).

1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant, puis écrire sa négation :

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + 1 > 0$;
- (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad xy = y$;
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad y^2 = x$. (1,5 pt)

2. Soient x et y deux réels. Montrer, en raisonnant par contraposée, que :

$$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

(1 pt)

3. Soit n un entier naturel non nul. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier naturel. (1 pt)

4. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(1,5 pt)

Ensembles et applications

Exercice 2 (6 points). Partie A.

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E .

- 1. Montrer que : $A \subset B \iff A \cup B = B$. (1 pt)
- 2. Montrer que si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$. (1 pt)

Partie B. On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

1. Montrer que f est injective. (1 pt)

2. L'application f est-elle surjective ? Justifier. (1 pt)
3. Soit $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ l'application définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1} . (1 pt)
4. Vérifier que pour tout $x \neq 1 : f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$. En déduire l'image directe $f([2, 4])$ et l'image réciproque $f^{-1}(]-\infty, 2])$. (1 pt)

Généralités sur les fonctions numériques

Exercice 3 (9 points). Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et étudier la parité de f . Interpréter graphiquement le résultat. (1 pt)
2. (a) Montrer que pour tout réel $x : 1 - f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. (0,5 pt)
(b) En déduire que pour tout réel $x : -1 \leq f(x) \leq 1$, et préciser en quels points ces bornes sont atteintes. (1 pt)
3. (a) Soient x_1 et x_2 deux réels positifs tels que $x_1 < x_2$. Montrer que :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}.$$

- (1 pt)
- (b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, 1]$ puis sur $[1, +\infty[$. (1 pt)
- (c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (on utilisera la parité). (0,5 pt)
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x-1) + 2$. Exprimer $h(x)$ en fonction de x et préciser la transformation géométrique qui permet d'obtenir la courbe de h à partir de $(\mathcal{C})$. (1 pt)
5. Soit u la fonction définie par $u(x) = \sqrt{x}$.
(a) Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ u$ et exprimer $(f \circ u)(x)$. (0,5 pt)
(b) Déterminer le sens de variation de $f \circ u$ sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. (0,5 pt)
(c) En déduire que pour tout réel $x \geq 0 : 2\sqrt{x} \leq x + 1$. (0,5 pt)
6. Soit m un réel. Déterminer, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = m$. (1,5 pt)