

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1 : logique, ensembles, fonctions

Logique mathématique

Solution 1.

- (a) **Vraie.** Pour tout réel x : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ (forme canonique). Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$.
 (b) **Vraie.** Le réel $x = 1$ convient : pour tout $y \in \mathbb{R}, 1 \times y = y$. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy \neq y$.
 (c) **Fausse.** Pour $x = -1$, l'équation $y^2 = -1$ n'a pas de solution réelle car un carré est toujours positif ou nul : $x = -1$ est un contre-exemple. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \neq x$.
- La contraposée de l'implication est : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$. Supposons $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. En développant : $xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$, d'où $2y = 2x$, soit $x = y$. La contraposée est vraie, donc l'implication $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ est vraie (une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité).
- Supposons par l'absurde qu'il existe un entier naturel m tel que $\sqrt{n^2 + 1} = m$, c'est-à-dire $m^2 = n^2 + 1$. Comme $n \geq 1$, on a $2n + 1 > 1$, donc

$$n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \text{ soit } n^2 < m^2 < (n+1)^2.$$

Les nombres $n, m, n+1$ étant positifs et la fonction carré strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit $n < m < n+1$: l'entier m serait strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est impossible. Donc $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier naturel.

- Soit $P(n)$ la propriété : « $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut $1 \times 2 = 2$ et le membre de droite vaut $\frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$. $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie. Alors

$$1 \times 2 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2),$$

et $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$, ce qui est exactement $P(n+1)$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Ensembles et applications

Solution 2.

Partie A.

1. $(\Rightarrow)$ Supposons $A \subset B$. On a toujours $B \subset A \cup B$. Réciproquement, soit $x \in A \cup B$: si $x \in A$ alors $x \in B$ (car $A \subset B$) ; sinon $x \in B$. Dans les deux cas $x \in B$, donc $A \cup B \subset B$. D'où $A \cup B = B$.
 $(\Leftarrow)$ Supposons $A \cup B = B$. Soit $x \in A$; alors $x \in A \cup B = B$. Donc $A \subset B$.
 Conclusion : $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
2. Supposons $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, donc $A \subset B$. De même $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$, donc $B \subset A$. Par double inclusion, $A = B$.

Partie B.

1. Soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $(2x+1)(x'-1) = (2x'+1)(x-1)$, soit $2xx' - 2x + x' - 1 = 2xx' - 2x' + x - 1$, d'où $3x' = 3x$ et $x = x'$. Donc f est injective.
2. Cherchons un antécédent de 2 : $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x+1 = 2(x-1) \Leftrightarrow 1 = -2$, ce qui est impossible. Le réel 2 n'a pas d'antécédent par f , donc f n'est **pas surjective**.
3. **Injectivité** : g a la même expression que f , donc g est injective (question 1).
Surjectivité : soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Pour $x \neq 1$:

$$g(x) = y \Leftrightarrow 2x+1 = y(x-1) \Leftrightarrow x(2-y) = -(y+1) \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \quad (y \neq 2).$$

Ce réel x est bien différent de 1 car $\frac{y+1}{y-2} = 1 \Leftrightarrow y+1 = y-2$ est impossible. Ainsi tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ admet un (unique) antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: g est surjective.

Donc g est bijective et sa bijection réciproque est

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad y \mapsto \frac{y+1}{y-2}.$$

4. Pour $x \neq 1$: $2 + \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1} = f(x)$.
Image directe. Soit $x \in [2, 4]$. Alors $1 \leq x-1 \leq 3$, donc $1 \leq \frac{3}{x-1} \leq 3$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$) et $3 \leq f(x) \leq 5$: ainsi $f([2, 4]) \subset [3, 5]$. Réciproquement, soit $y \in [3, 5]$ et $x = g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$; on a $f(x) = y$ et, comme $y-2 > 0$:

$$x-2 = \frac{5-y}{y-2} \geq 0, \quad 4-x = \frac{3y-9}{y-2} \geq 0,$$

donc $x \in [2, 4]$. Conclusion : $f([2, 4]) = [3, 5]$.

Image réciproque. $f^{-1}(]-\infty, 2]) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid f(x) < 2\}$. Or $f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Donc $f^{-1}(]-\infty, 2]) =]-\infty, 1[$.

Généralités sur les fonctions numériques

Solution 3.

1. Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Donc f est **impaire** : la courbe $(\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2. (a) Pour tout réel x : $1 - f(x) = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
 (b) Comme $(x-1)^2 \geq 0$ et $x^2+1 > 0$, on obtient $1 - f(x) \geq 0$, soit $f(x) \leq 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. De même $f(x) + 1 = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$, soit $f(x) \geq -1$, avec égalité si et seulement si $x = -1$. Ainsi, pour tout réel x , $-1 \leq f(x) \leq 1$: f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à 1, atteint en $x = 1$, et un minimum égal à -1 , atteint en $x = -1$.
3. (a) Soient $0 \leq x_1 < x_2$. En réduisant au même dénominateur :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2(x_1^2+1) - 2x_1(x_2^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{2(x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_2 - x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

Or $x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + x_2 - x_1 = x_1x_2(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(1 - x_1x_2)$, d'où la formule demandée.

(b) Le dénominateur est strictement positif et $x_2 - x_1 > 0$: le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ est celui de $1 - x_1x_2$.

Sur $[0, 1]$: si $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ alors $0 \leq x_1x_2 < 1$, donc $1 - x_1x_2 > 0$ et $f(x_2) > f(x_1)$: f est **strictement croissante sur $[0, 1]$** .

Sur $[1, +\infty[$: si $1 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1x_2 > 1$, donc $1 - x_1x_2 < 0$ et $f(x_2) < f(x_1)$: f est **strictement décroissante sur $[1, +\infty[$** .

(c) Par imparité, la courbe est symétrique par rapport à O , ce qui renverse le sens de lecture mais conserve le sens de variation : f est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$, strictement croissante sur $[-1, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

4. Pour tout réel x : $h(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1} + 2 = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + 2$. Le point $M(x; f(x))$ de $(\mathcal{C})$ a pour image le point $M'(x+1; f(x)+2)$ de la courbe de h : la courbe de h est l'image de $(\mathcal{C})$ par la **translation de vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$** (translation horizontale de 1 vers la droite suivie d'une translation verticale de 2 vers le haut).
5. (a) u est définie sur $[0, +\infty[$ et, pour $x \geq 0$, $u(x) = \sqrt{x} \in D_f = \mathbb{R}$. Donc $D_{f \circ u} = [0, +\infty[$ et

$$(f \circ u)(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}.$$

(b) La fonction u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $u([0, 1]) = [0, 1]$ et $u([1, +\infty[) = [1, +\infty[$. Sur $[0, 1]$, f est croissante sur $u([0, 1]) = [0, 1]$: la composée de deux fonctions croissantes est croissante, donc $f \circ u$ est **croissante sur $[0, 1]$** . Sur $[1, +\infty[$, f est décroissante sur $u([1, +\infty[) = [1, +\infty[$: la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante, donc $f \circ u$ est **décroissante sur $[1, +\infty[$** .

(c) D'après (b), $f \circ u$ admet en $x = 1$ un maximum sur $[0, +\infty[$, égal à $(f \circ u)(1) = \frac{2}{2} = 1$. Donc pour tout $x \geq 0$: $\frac{2\sqrt{x}}{x+1} \leq 1$, et comme $x+1 > 0$: $2\sqrt{x} \leq x+1$. (On peut aussi le voir directement avec la question 2 : $f(\sqrt{x}) \leq 1$.)

6. Pour tout réel x , comme $x^2 + 1 \neq 0$:

$$f(x) = m \iff 2x = m(x^2 + 1) \iff mx^2 - 2x + m = 0.$$

- Si $m = 0$: l'équation devient $-2x = 0$, qui admet l'unique solution $x = 0$.
- Si $m \neq 0$: c'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4 - 4m^2 = 4(1 - m^2)$.
 - Si $|m| > 1$: $\Delta < 0$, **aucune solution**.

- Si $|m| = 1$: $\Delta = 0$, **une solution** (double) $x = \frac{1}{m}$, c'est-à-dire $x = 1$ pour $m = 1$ et $x = -1$ pour $m = -1$.
- Si $0 < |m| < 1$: $\Delta > 0$, **deux solutions distinctes** $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-m^2}}{m}$.

Conclusion : l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution si $m < -1$ ou $m > 1$; une seule solution si $m \in \{-1, 0, 1\}$; exactement deux solutions si $m \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. Ce résultat est cohérent avec le tableau de variations et l'encadrement $-1 \leq f(x) \leq 1$.