

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 2 : structures algébriques, espaces vectoriels, probabilités et analyse

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 5 + 4 + 5 + 6 points. Toute réponse doit être justifiée.

Structures algébriques

Exercice 1 (5 points). On note $G =]-1, 1[$ et l'on définit, pour tous $x, y \in G$:

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

- Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur G (on pourra étudier le signe de $(1 - x)(1 - y)$ et de $(1 + x)(1 + y)$). (0,75 pt)
- Soit φ l'application définie sur G par $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$.
 - Montrer que φ est une bijection de G sur $]0, +\infty[$ et déterminer $\varphi^{-1}(y)$ pour tout $y > 0$. (0,75 pt)
 - Montrer que pour tous $x, y \in G$: $\varphi(x * y) = \varphi(x)\varphi(y)$. (0,75 pt)
- En déduire que la loi $*$ est associative et commutative. (0,5 pt)
 - Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif ; préciser son élément neutre et le symétrique d'un élément x de G . Que peut-on alors dire de φ ? (0,75 pt)
- Montrer que $H = G \cap \mathbb{Q}$ est un sous-groupe de $(G, *)$. (0,75 pt)
- Pour $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x^{(n)} = x * x * \dots * x$ (n facteurs).
 - Montrer que $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$ et en déduire que

$$x^{(n)} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}.$$

(0,5 pt)

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)}$ lorsque $x \in]0, 1[$. (0,25 pt)

Espaces vectoriels

Exercice 2 (4 points). Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ et les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, -1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1)$.

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (0,5 pt)
 - Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de F et préciser $\dim F$. (0,75 pt)

2. (a) Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (0,5 pt)
(b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (4, 1, 1)$ dans cette base. (0,5 pt)
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
(a) Montrer que f est linéaire. (0,5 pt)
(b) Déterminer $\text{Ker } f$ et en donner une base. (0,5 pt)
(c) Montrer que $\text{Im } f = F$, puis vérifier le théorème du rang. (0,75 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (5 points). Une urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires ; une urne U_2 contient une boule blanche et quatre boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A. On lance un dé cubique équilibré : si le résultat est pair, on tire une boule de U_1 ; sinon, on tire une boule de U_2 . On note A l'événement « le résultat du dé est pair » et B l'événement « la boule tirée est blanche ».

1. Montrer que $P(B) = \frac{2}{5}$. (0,75 pt)
2. (a) La boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ? (0,5 pt)
(b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? (0,5 pt)
3. On répète n fois cette expérience ($n \geq 1$), de façon indépendante, en remettant chaque fois la boule tirée dans son urne. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
(a) Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer $E(Y)$. (0,5 pt)
(b) Exprimer $P(Y \geq 1)$ en fonction de n , puis déterminer le plus petit entier n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,99$. (0,75 pt)

Partie B. On tire simultanément deux boules de l'urne U_1 et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de probabilité de X . (1 pt)
2. Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$. (1 pt)

Problème d'analyse

Exercice 4 (6 points). Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$) et interpréter graphiquement. (0,5 pt)
2. Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, et dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
3. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1. (0,5 pt)
(b) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ (on prendra $e^2 \approx 7,4$ et $\frac{2}{e} \approx 0,74$). (0,5 pt)

4. Montrer que f réalise une bijection de $]0, e^2]$ sur un intervalle J que l'on précisera. (0,5 pt)
5. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $A = \int_1^{e^2} f(x) \, dx$. (1 pt)
(b) Calculer le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$. (0,75 pt)
6. (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq \frac{2}{e}\sqrt{x}$. (0,5 pt)
(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $0 \leq \ln(n!) \leq \frac{2}{e}n\sqrt{n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}$ (on rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$). (0,25 pt)