

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 2 : structures algébriques, espaces vectoriels, probabilités et analyse

Structures algébriques

Solution 1.

- Soient $x, y \in G$. Comme $|x| < 1$ et $|y| < 1$, on a $|xy| < 1$, donc $1 + xy > 0$ et $x * y$ est bien défini. De plus : $1 - x * y = \frac{1+xy-x-y}{1+xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0$ car $1 - x > 0$ et $1 - y > 0$; et $1 + x * y = \frac{1+xy+x+y}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0$ car $1 + x > 0$ et $1 + y > 0$. Donc $-1 < x * y < 1$, c'est-à-dire $x * y \in G$: $*$ est une loi de composition interne sur G .
- (a) Pour $x \in G$, $1 - x > 0$ et $1 + x > 0$, donc $\varphi(x)$ est défini et $\varphi(x) > 0$. φ est dérivable sur G et $\varphi'(x) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$: φ est continue et strictement croissante sur $] -1, 1[$, avec $\lim_{x \rightarrow -1^+} \varphi(x) = \frac{0}{2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = +\infty$ (numérateur vers 2, dénominateur vers 0^+). D'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de G sur $]0, +\infty[$. Pour $y > 0$ et $x \in G$: $y = \frac{1+x}{1-x} \iff y - xy = 1 + x \iff x(1 + y) = y - 1 \iff x = \frac{y-1}{y+1}$. Donc $\varphi^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}$ (on vérifie que ce réel est bien dans $] -1, 1[$ car $|y - 1| < y + 1$ pour $y > 0$).
- (b) D'après les calculs de la question 1 : $\varphi(x * y) = \frac{1+xy}{1-x*y} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} \times \frac{1+xy}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+x}{1-x} \times \frac{1+y}{1-y} = \varphi(x)\varphi(y)$.
- (a) **Associativité.** Soient $x, y, z \in G$. En utilisant 2(b) et l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$: $\varphi((x * y) * z) = \varphi(x * y)\varphi(z) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = \varphi(x)\varphi(y * z) = \varphi(x * (y * z))$. Comme φ est injective, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
Commutativité. $\varphi(x * y) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(y * x)$, donc $x * y = y * x$ par injectivité de φ (on peut aussi le lire directement sur la formule, symétrique en x et y).
- (b) **Élément neutre.** $0 \in G$ et pour tout $x \in G$, $x * 0 = 0 * x = \frac{x}{1+0} = x$: 0 est élément neutre.
Symétrique. Pour $x \in G$, $-x \in G$ et $x * (-x) = \frac{x-x}{1-x^2} = 0$; par commutativité, $(-x) * x = 0$. Donc tout élément x de G admet pour symétrique $x' = -x$.
 La loi $*$ est interne, associative, commutative, admet un élément neutre et tout élément a un symétrique : $(G, *)$ est un groupe commutatif. Enfin φ est une bijection de G sur $]0, +\infty[$ qui vérifie $\varphi(x * y) = \varphi(x)\varphi(y)$: φ est un isomorphisme du groupe $(G, *)$ vers le groupe $(]0, +\infty[, \times)$.
- $H = G \cap \mathbb{Q}$ est une partie de G , non vide car $0 \in H$ (élément neutre). Soient $x, y \in H$. Le symétrique de y est $-y \in H$, et $x * (-y) = \frac{x-y}{1-xy}$ est un rationnel (quotient de rationnels, dénominateur non nul) qui appartient à G d'après la question 1. Donc $x * y' \in H$ où y' est le symétrique de y . D'après la caractérisation des sous-groupes, H est un sous-groupe de $(G, *)$.
- (a) Par récurrence sur $n \geq 1$: $\varphi(x^{(1)}) = \varphi(x)$; si $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$, alors $\varphi(x^{(n+1)}) = \varphi(x^{(n)} * x) = \varphi(x^{(n)})\varphi(x) = (\varphi(x))^{n+1}$. Donc $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit $x^{(n)} = \varphi^{-1}((\varphi(x))^n) = \frac{(\varphi(x))^n - 1}{(\varphi(x))^{n-1} + (\varphi(x))^{n-2} + \dots + 1}$ avec $(\varphi(x))^n = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n = \frac{(1+x)^n}{(1-x)^n}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $(1-x)^n > 0$: $x^{(n)} = \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^{n-1} + (1-x)^{n-1} + \dots + 1}$.

(b) Pour $x \in]0, 1[$, $0 < 1 - x < 1 + x$, donc $q = \frac{1-x}{1+x} \in]0, 1[$. En divisant numérateur et dénominateur par $(1+x)^n$: $x^{(n)} = \frac{1-q^n}{1+q^n}$. Comme $0 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = 1$.

Espaces vectoriels

Solution 2.

- (a) $F \subset \mathbb{R}^3$ et $(0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 + 0 = 0$. Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{u}' = (x', y', z')$ dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\vec{u} + \lambda\vec{u}' = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ et $(x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (z + \lambda z') = (x + y + z) + \lambda(x' + y' + z') = 0$, donc $\vec{u} + \lambda\vec{u}' \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\vec{u}_1 \in F$ car $1 - 1 + 0 = 0$ et $\vec{u}_2 \in F$ car $1 + 0 - 1 = 0$. **Liberté** : $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \vec{0}$ donne $(a + b, -a, -b) = (0, 0, 0)$, d'où $a = b = 0$. **Génératrice** : soit $(x, y, z) \in F$; alors $z = -x - y$ et $(x, y, -x - y) = -y(1, -1, 0) + (x + y)(1, 0, -1) = -y\vec{u}_1 + (x + y)\vec{u}_2$. Donc $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de F et $\dim F = 2$.
- (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{w} = (x, y, z)$, c'est-à-dire $a + b + c = x$, $-a + c = y$, $-b + c = z$. Les deux dernières équations donnent $a = c - y$ et $b = c - z$; la première devient $3c - y - z = x$, soit $c = \frac{x+y+z}{3}$, puis $a = \frac{x-2y+z}{3}$ et $b = \frac{x+y-2z}{3}$. Ce système admet donc une unique solution pour tout (x, y, z) : la famille est génératrice (existence) et libre (unicité, avec $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ donnant $a = b = c = 0$). C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Pour $\vec{v} = (4, 1, 1)$: $c = \frac{4+1+1}{3} = 2$, $a = \frac{4-2+1}{3} = 1$, $b = \frac{4+1-2}{3} = 1$. Donc $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 2\vec{w}$: ses coordonnées dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w})$ sont $(1, 1, 2)$. Vérification : $(1, -1, 0) + (1, 0, -1) + (2, 2, 2) = (4, 1, 1)$.
- (a) Soient $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{u}' = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $f(\vec{u} + \lambda\vec{u}') = f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = ((y + \lambda y') - (z + \lambda z'), (z + \lambda z') - (x + \lambda x'), (x + \lambda x') - (y + \lambda y')) = (y - z, z - x, x - y) + \lambda(y' - z', z' - x', x' - y') = f(\vec{u}) + \lambda f(\vec{u}')$. Donc f est linéaire.

(b) $(x, y, z) \in \text{Ker } f \iff y - z = 0, z - x = 0, x - y = 0 \iff x = y = z$. Donc $\text{Ker } f = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\} = \{x\vec{w}; x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{w})$: c'est une droite vectorielle de base $(\vec{w})$, de dimension 1.

(c) Pour tout (x, y, z) , les coordonnées de $f(x, y, z)$ ont pour somme $(y - z) + (z - x) + (x - y) = 0$, donc $\text{Im } f \subset F$. Réciproquement, $f(0, 0, 1) = (-1, 1, 0) = -\vec{u}_1$ et $f(0, 1, 0) = (1, 0, -1) = \vec{u}_2$, donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ appartiennent à $\text{Im } f$; comme $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel, il contient toutes leurs combinaisons linéaires : $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \subset \text{Im } f$. D'où $\text{Im } f = F$. Théorème du rang : $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Calcul des probabilités

Solution 3.

Partie A.

- Le dé est équilibré : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$. Si le résultat est pair, on tire dans U_1 : $P_A(B) = \frac{3}{5}$; sinon dans U_2 : $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{5}$. Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de

- l'univers ; d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
2. (a) On cherche $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ avec $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{3}{10}$. Donc $P_B(A) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{4}$.
- (b) $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$ et $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$. Comme $\frac{3}{10} \neq \frac{1}{5}$, les événements A et B ne sont pas indépendants.
3. (a) On répète n fois, de façon indépendante, une même épreuve de Bernoulli dont le succès « obtenir une boule blanche » a pour probabilité $p = \frac{2}{5}$. Donc Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{2}{5})$: pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(Y = k) = \binom{n}{k} (\frac{2}{5})^k (\frac{3}{5})^{n-k}$, et $E(Y) = np = \frac{2n}{5}$.
- (b) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (\frac{3}{5})^n$. $P(Y \geq 1) \geq 0,99 \iff (\frac{3}{5})^n \leq 0,01 \iff n \ln(\frac{3}{5}) \leq \ln(0,01)$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante) $\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(\frac{3}{5})}$ (car $\ln(\frac{3}{5}) < 0$), soit $n \geq \frac{\ln 100}{\ln 5 - \ln 3} \approx 4,605,511 \approx 9,02$. Le plus petit entier qui convient est $n = 10$. Vérification : $(\frac{3}{5})^9 \approx 0,0101 > 0,01$ et $(\frac{3}{5})^{10} \approx 0,0060 \leq 0,01$.

Partie B.

1. L'urne U_1 contient 5 boules ; il y a $\binom{5}{2} = 10$ tirages équiprobables. X prend les valeurs 0, 1, 2 : $P(X = 0) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$ (deux noires), $P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$. On vérifie : $\frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = 1$.
2. $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2$. $E(X^2) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 4 \times \frac{3}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{9}{5} - \frac{36}{25} = \frac{45}{25} - \frac{36}{25} = \frac{9}{25} = 0,36$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0,6$.

Problème d'analyse

Solution 4.

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: l'axe des ordonnées (droite $x = 0$) est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
- (b) Posons $t = \sqrt{x}$; quand $x \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$ et $f(x) = \frac{\ln(t^2)}{t} = \frac{2 \ln t}{t}$. Par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses (droite $y = 0$) est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
2. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \sqrt{x}$, dérivables sur $]0, +\infty[$ avec $v(x) > 0$; $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} - \ln x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$. Comme $2x\sqrt{x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2 - \ln x$: $f'(x) > 0 \iff \ln x < 2 \iff x < e^2$. Donc f est strictement croissante sur $]0, e^2]$ et strictement décroissante sur $[e^2, +\infty[$, avec un maximum $f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$. Tableau : f croît de $-\infty$ à $\frac{2}{e}$ sur $]0, e^2]$, puis décroît de $\frac{2}{e}$ vers 0 sur $[e^2, +\infty[$.
3. (a) $f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$: $S = \{1\}$. On a $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{2-0}{2 \times 1} = 1$, donc (T) : $y = x - 1$.
- (b) Tracé : asymptote verticale $x = 0$, passage par $(1, 0)$ avec la tangente $y = x - 1$, maximum au point $(e^2, \frac{2}{e}) \approx (7,4; 0,74)$ avec tangente horizontale, puis décroissance lente vers l'axe des abscisses, qui est asymptote en $+\infty$ (la courbe reste au-dessus de cet axe pour $x > 1$).
4. f est continue et strictement croissante sur $]0, e^2]$: elle réalise une bijection de $]0, e^2]$ sur $J = f([0, e^2]) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e^2)] =]-\infty, \frac{2}{e}]$.

5. (a) Intégration par parties avec $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$ (u et v sont de classe C^1 sur $[1, e^2]$) : $A = [2\sqrt{x} \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} \times \frac{1}{x} dx = 2e \times 2 - 0 - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4e - [4\sqrt{x}]_1^{e^2} = 4e - (4e - 4) = 4$.
- (b) Sur $[1, e^2]$, $f(x) \geq 0$. Le volume du solide de révolution est $V = \pi \int_1^{e^2} (f(x))^2 dx = \pi \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$. Or $\frac{(\ln x)^2}{x} = u'(x)(u(x))^2$ avec $u(x) = \ln x$, dont une primitive est $\frac{(\ln x)^3}{3}$. Donc $V = \pi \left[\frac{(\ln x)^3}{3} \right]_1^{e^2} = \pi \times \left(\frac{2^3}{3} - 0 \right) = \frac{8\pi}{3}$ unités de volume.
6. (a) D'après le tableau de variations, f admet sur $]0, +\infty[$ un maximum égal à $\frac{2}{e}$: pour tout $x > 0$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{e}$. En multipliant par $\sqrt{x} > 0$: $\ln x \leq \frac{2}{e}\sqrt{x}$.
- (b) Soit $n \geq 1$. $\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \sum_{k=1}^n \ln k$. Chaque terme vérifie $\ln k \geq 0$ (car $k \geq 1$), donc $\ln(n!) \geq 0$. Par (a), $\ln k \leq \frac{2}{e}\sqrt{k} \leq \frac{2}{e}\sqrt{n}$ pour $1 \leq k \leq n$ (la fonction racine carrée est croissante), donc $\ln(n!) \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{e}\sqrt{n} = \frac{2}{e}n\sqrt{n}$. En divisant par n^2 : $0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{2}{e\sqrt{n}}$, et $\frac{2}{e\sqrt{n}} \rightarrow 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2} = 0$.