

# Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 1 : calcul intégral, équations différentielles et arithmétique

**Durée : 2 heures.** L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 5 + 4 + 5 + 6 points. Toute réponse doit être justifiée.

## Arithmétique

### Exercice 1 (5 points).

- (a) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $13u + 8v = 1$ . (0,5 pt)  
 (b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : 13x + 8y = 3$ . (0,75 pt)  
 (c) Déterminer les solutions  $(x, y)$  de  $(E)$  telles que  $0 \leq x \leq 20$ . (0,5 pt)
- (a) Vérifier que  $2^3 \equiv 1 [7]$ . (0,25 pt)  
 (b) En déduire le reste de la division euclidienne de  $2025^{2026}$  par 7. (0,5 pt)
- Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 (a) Montrer, à l'aide du petit théorème de Fermat, que  $n^7 \equiv n [7]$ . (0,5 pt)  
 (b) Montrer que  $n^7 \equiv n [2]$  et que  $n^7 \equiv n [3]$ . (0,5 pt)  
 (c) En déduire que 42 divise  $n^7 - n$ . (0,5 pt)
- Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p \geq 5$ . Montrer que 24 divise  $p^2 - 1$ . (1 pt)

## Équations différentielles

### Exercice 2 (4 points).

- (a) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E_1) : y' + 2y = 6$ . (0,75 pt)  
 (b) Déterminer la solution  $f$  de  $(E_1)$  telle que  $f(0) = 1$ , et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (0,5 pt)
- Soit  $g$  la solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E_2) : y'' + 4y = 0$  vérifiant  $g(0) = 1$  et  $g'(0) = 2$ .  
 (a) Déterminer  $g(x)$  pour tout réel  $x$ . (0,75 pt)  
 (b) Montrer que pour tout réel  $x : g(x) = \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ , et en déduire que  $|g(x)| \leq \sqrt{2}$  pour tout réel  $x$ . (0,25 pt)
- On considère l'équation différentielle  $(E_3) : y' - y = x$ .  
 (a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $y_p : x \rightarrow ax + b$  soit solution de  $(E_3)$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,5 pt)  
 (b) Montrer qu'une fonction  $y$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de  $(E_3)$  si et seulement si la fonction  $y - y_p$  est solution de l'équation  $(E_0) : y' = y$ . (0,5 pt)

- (c) En déduire l'ensemble des solutions de  $(E_3)$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,5 pt)  
(d) Déterminer la solution  $h$  de  $(E_3)$  telle que  $h(0) = 0$ . (0,25 pt)

## Calcul intégral

---

### Exercice 3 (5 points).

1. Calculer les intégrales suivantes :

- (a)  $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$  ; (0,5 pt)  
(b)  $J = \int_0^e \ln x dx$  ; (0,5 pt)  
(c)  $K = \int_0^{\frac{1}{4}} \tan x dx$ . (0,5 pt)

2. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- (a) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ . (0,5 pt)  
(b) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et à termes positifs. En déduire qu'elle converge. (0,5 pt)  
(c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ . (0,5 pt)  
(d) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$ . (0,75 pt)  
(e) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 + (-1)^n I_{n+1},$$

et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ . (1,25 pt)

## Étude de fonction et calcul intégral

---

**Exercice 4 (6 points).** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x e^{1-x}$ , et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

- Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ , et étudier les branches infinies de  $(\mathcal{C})$ . (1 pt)
- Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  et dresser le tableau de variations de  $f$ . (0,75 pt)
- Montrer que  $(\mathcal{C})$  admet un unique point d'inflexion  $I$ , dont on précisera les coordonnées, et déterminer une équation de la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $I$ . (0,5 pt)
- Tracer  $(\mathcal{C})$  (on prendra  $e \approx 2,7$ ). (0,5 pt)
- Vérifier que  $f$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $(E)$  :  $y' + y = e^{1-x}$ . (0,25 pt)
  - Montrer qu'une fonction  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $g - f$  est solution de l'équation  $y' = -y$ . (0,5 pt)
  - En déduire toutes les solutions de  $(E)$ , puis celle qui s'annule en 1. (0,5 pt)
- À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^1 f(x) dx$ . (0,75 pt)
  - En déduire, en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine délimité par  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . (0,5 pt)

7. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $J_n = \int_0^n f(x) \, dx$ .
- (a) Montrer que  $J_n = e - (n+1)e^{1-n}$ . (0,5 pt)
  - (b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ . (0,25 pt)