

Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 1 : calcul intégral, équations différentielles et arithmétique

Arithmétique

Solution 1.

1. (a) Algorithme d'Euclide : $13 = 1 \times 8 + 5$, $8 = 1 \times 5 + 3$, $5 = 1 \times 3 + 2$, $3 = 1 \times 2 + 1$.
Donc $\text{pgcd}(13, 8) = 1$. En remontant : $1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \times 3 - 5 = 2(8 - 5) - 5 = 2 \times 8 - 3 \times 5 = 2 \times 8 - 3(13 - 8) = 5 \times 8 - 3 \times 13$. Ainsi $13 \times (-3) + 8 \times 5 = 1$: le couple $(u, v) = (-3, 5)$ convient.

(b) En multipliant par 3 : $13 \times (-9) + 8 \times 15 = 3$, donc $(-9, 15)$ est une solution particulière de (E) . Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. (x, y) est solution de (E) si et seulement si $13x + 8y = 13 \times (-9) + 8 \times 15$, soit $13(x + 9) = 8(15 - y)$.

Si (x, y) est solution, alors 8 divise $13(x + 9)$; comme $\text{pgcd}(8, 13) = 1$, le théorème de Gauss donne $8 \mid (x + 9)$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 9 = 8k$, soit $x = -9 + 8k$. En reportant : $13 \times 8k = 8(15 - y)$, d'où $y = 15 - 13k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $13(-9 + 8k) + 8(15 - 13k) = -117 + 104k + 120 - 104k = 3$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{(-9 + 8k, 15 - 13k); k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $0 \leq -9 + 8k \leq 20 \iff \frac{9}{8} \leq k \leq \frac{29}{8} \iff k \in \{2, 3\}$ (car k est entier). Pour $k = 2$: $(x, y) = (7, -11)$; pour $k = 3$: $(x, y) = (15, -24)$. Vérification : $13 \times 7 - 8 \times 11 = 91 - 88 = 3$ et $13 \times 15 - 8 \times 24 = 195 - 192 = 3$.

2. (a) $2^3 = 8 = 7 + 1$, donc $2^3 \equiv 1 [7]$.

(b) $2025 = 7 \times 289 + 2$, donc $2025 \equiv 2 [7]$ et $2025^{2026} \equiv 2^{2026} [7]$. Or $2026 = 3 \times 675 + 1$, donc $2^{2026} = (2^3)^{675} \times 2 \equiv 1^{675} \times 2 \equiv 2 [7]$. Comme $0 \leq 2 < 7$, le reste de la division euclidienne de 2025^{2026} par 7 est 2.

3. (a) 7 est premier, donc d'après le petit théorème de Fermat (deuxième forme), pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $n^7 \equiv n [7]$.

(b) Modulo 2 : si n est pair, n^7 et n sont pairs, donc $n^7 \equiv 0 \equiv n [2]$; si n est impair, n^7 est impair et $n^7 \equiv 1 \equiv n [2]$. Dans les deux cas $n^7 \equiv n [2]$.

Modulo 3 : 3 est premier, donc par Fermat $n^3 \equiv n [3]$. Alors $n^7 = (n^3)^2 \times n \equiv n^2 \times n = n^3 \equiv n [3]$.

(c) D'après (a) et (b), $n^7 - n$ est divisible par 2, par 3 et par 7. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, $6 = 2 \times 3$ divise $n^7 - n$; puis, 6 et 7 étant premiers entre eux, $42 = 6 \times 7$ divise $n^7 - n$.

4. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Divisibilité par 8. $p \geq 5$ est premier, donc p est impair : $p - 1$ et $p + 1$ sont deux entiers pairs consécutifs (ils diffèrent de 2). Parmi deux entiers pairs consécutifs, l'un est multiple de 4 : écrivons $p - 1 = 2m$ et $p + 1 = 2(m + 1)$; l'un des entiers m , $m + 1$ est pair, donc $(p - 1)(p + 1) = 4m(m + 1)$ est divisible par 8.

Divisibilité par 3. p est premier et $p \geq 5$, donc 3 ne divise pas p : $p \equiv 1 [3]$ ou $p \equiv 2 [3]$. Si

$p \equiv 1 [3]$, alors $3 \mid (p-1)$; si $p \equiv 2 [3]$, alors $p+1 \equiv 0 [3]$ et $3 \mid (p+1)$. Dans les deux cas $3 \mid (p-1)(p+1)$.

Conclusion. $8 \mid (p^2-1)$, $3 \mid (p^2-1)$ et $\text{pgcd}(8,3) = 1$, donc $8 \times 3 = 24$ divise p^2-1 .

Équations différentielles

Solution 2.

- (a) (E_1) s'écrit $y' = -2y + 6$, équation du type $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 6$. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{-2x} - \frac{b}{a} = Ce^{-2x} + 3$, où $C \in \mathbb{R}$.
(b) $f(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2$: $f(x) = 3 - 2e^{-2x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.
- (a) (E_2) est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$: ses solutions sont $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$, $A, B \in \mathbb{R}$. $g(0) = A = 1$. $g'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$, donc $g'(0) = 2B = 2$, soit $B = 1$. Ainsi $g(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.
(b) $\sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(2x) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(2x) \sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(2x) + \sin(2x)) = g(x)$. Comme $|\cos(2x - \frac{\pi}{4})| \leq 1$, on obtient $|g(x)| \leq \sqrt{2}$ pour tout réel x .
- (a) $y_{p(x)} = ax + b$ donne $y_{p'}(x) = a$, et $y_{p'} - y_p = a - ax - b = -ax + (a-b)$. y_p est solution de (E_3) si et seulement si $-ax + (a-b) = x$ pour tout x , soit $-a = 1$ et $a-b = 0$: $a = -1$ et $b = -1$. Donc $y_{p(x)} = -x - 1$.
(b) Soit y dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - y_p$. Alors $z' - z = (y' - y) - (y_{p'} - y_p) = (y' - y) - x$. Donc y est solution de $(E_3) \iff y' - y = x \iff z' - z = 0 \iff z' = z$, c'est-à-dire si et seulement si $z = y - y_p$ est solution de (E_0) .
(c) Les solutions de $(E_0) : y' = y$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$. D'après (b), les solutions de (E_3) sont les fonctions $y(x) = Ce^x + y_{p(x)} = Ce^x - x - 1$, $C \in \mathbb{R}$.
(d) $h(0) = C - 1 = 0$ donne $C = 1$: $h(x) = e^x - x - 1$.

Calcul intégral

Solution 3.

- (a) Intégration par parties avec $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$ (u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$) : $I = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$.
(b) Intégration par parties avec $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$: $J = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e - (e - 1) = 1$.
(c) Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, $\cos x > 0$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos x$. Une primitive est $-\ln(\cos x)$, donc $K = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln 1 = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$.
- (a) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$. Pour I_1 , on écrit $\frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$: $I_1 = \int_0^1 dx - I_0 = 1 - \ln 2$.
(b) Pour $x \in [0, 1]$, $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale $I_n \geq 0$. De plus $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leq 0$ car $x^n(x-1) \leq 0$ sur $[0, 1]$: la suite (I_n) est décroissante. Décroissante et minorée par 0, elle converge (théorème de la convergence monotone).

- (c) Par linéarité, $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
- (d) Soit $n \geq 1$. Comme (I_n) est décroissante, $I_{n+1} \leq I_n$, donc d'après (c) : $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$, soit $I_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$. De même $I_n \leq I_{n-1}$, donc $\frac{1}{n} = I_{n-1} + I_n \geq 2I_n$, soit $I_n \leq \frac{1}{2n}$. Les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, $\lim I_n = 0$. En multipliant par n : $\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{1}{2}$, et $\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \rightarrow \frac{1}{2}$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{2}$.
- (e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après (c) : $\frac{(-1)^k}{k+1} = (-1)^k(I_k + I_{k+1}) = (-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1}$. En sommant pour $k = 0, 1, \dots, n$, la somme est télescopique : $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = (-1)^0 I_0 - (-1)^{n+1} I_{n+1} = \ln 2 + (-1)^n I_{n+1}$. Or $|(-1)^n I_{n+1}| = I_{n+1} \rightarrow 0$ d'après (d). Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

Étude de fonction et calcul intégral

Solution 4.

- $f(x) = e \times x e^{-x}$.

En $-\infty$: $x \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. De plus $\frac{f(x)}{x} = e^{1-x} \rightarrow +\infty$: (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

En $+\infty$: $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est asymptote à (C) en $+\infty$ (avec $f(x) > 0$ pour $x > 0$: la courbe est au-dessus de l'asymptote).
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables) et $f'(x) = e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) = (1-x)e^{1-x}$. Comme $e^{1-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1-x$: f est strictement croissante sur $] -\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$; elle admet en 1 un maximum $f(1) = 1 \times e^0 = 1$. Tableau : f croît de $-\infty$ à 1 sur $] -\infty, 1]$, puis décroît de 1 à 0 sur $[1, +\infty[$.
- f' est dérivable et $f''(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$, du signe de $x-2$: f'' s'annule en changeant de signe uniquement en $x=2$. Donc (C) admet un unique point d'inflexion $I(2, f(2)) = I(2, \frac{2}{e})$. La tangente en I a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -\frac{1}{e}(x-2) + \frac{2}{e} = \frac{4-x}{e}$.
- Tracé : $f(0) = 0$ et $f'(0) = e \approx 2,7$ (tangente en O de pente e), maximum au point $(1, 1)$ avec tangente horizontale, point d'inflexion $I(2, \frac{2}{e})$ avec $\frac{2}{e} \approx 0,74$, $f(3) = 3e^{-2} \approx 0,41$, $f(-1) = -e^2 \approx -7,4$; la courbe est concave sur $] -\infty, 2]$, convexe sur $[2, +\infty[$, et tend vers l'axe des abscisses en $+\infty$.
- (a) $f'(x) + f(x) = (1-x)e^{1-x} + xe^{1-x} = e^{1-x}$: f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h = g - f$. Comme $f' + f = e^{1-x}$: g solution de (E) $\iff g' + g = e^{1-x} \iff g' + g = f' + f \iff (g-f)' = -(g-f) \iff h' = -h$, c'est-à-dire si et seulement si $h = g - f$ est solution de $y' = -y$.

(c) Les solutions de $y' = -y$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Donc les solutions de (E) sont les fonctions $g(x) = xe^{1-x} + Ce^{-x} = (x + \frac{C}{e})e^{1-x}$, soit, en posant $k = \frac{C}{e}$: $g(x) = (x+k)e^{1-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Celle qui s'annule en 1 vérifie $(1+k)e^0 = 0$, soit $k = -1$: $g(x) = (x-1)e^{1-x}$.
- (a) Intégration par parties avec $u(x) = x$, $v'(x) = e^{1-x}$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{1-x}$: $\int_0^1 f(x) dx = [-xe^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + [-e^{1-x}]_0^1 = -1 + (-1 + e) = e - 2$.

(b) Sur $[0, 1]$, $f(x) \geq 0$, donc l'aire du domaine vaut $\int_0^1 f(x) dx = e - 2$ unités d'aire. L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, donc l'aire cherchée est $4(e - 2) = 4e - 8 \approx 2,87 \text{ cm}^2$.

7. (a) Même intégration par parties sur $[0, n]$: $J_n = [-xe^{1-x}]_0^n + \int_0^n e^{1-x} dx = -ne^{1-n} + [-e^{1-x}]_0^n = -ne^{1-n} - e^{1-n} + e = e - (n+1)e^{1-n}$.
- (b) $(n+1)e^{1-n} = e(ne^{-n} + e^{-n})$. Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n} = 0$, et $\lim e^{-n} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = e$: l'aire du domaine situé sous $(\mathcal{C})$ et au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \geq 0$ tend vers e unités d'aire.