

Devoir surveillé n°2 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 2 : fonctions logarithme et exponentielle, nombres complexes

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 4 + 4 + 5 + 7 points. Toute réponse doit être justifiée.

Nombres complexes

Exercice 1 (4 points). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$. (0,75 pt)
- On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 2 + 3i$, $b = 2 - 3i$ et $c = -1$. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C . (0,75 pt)
- (a) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que $|z - 2 - 3i| = |z + 1|$. (0,5 pt)
(b) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z - 2| = 3$, et vérifier que les points A , B et C appartiennent à (E_2) . (0,5 pt)
- (a) Montrer que pour tout nombre complexe z : $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2(|z|^2 + 1)$. (0,5 pt)
(b) Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$. Montrer que $\bar{z} = \frac{1}{z}$, puis que le nombre $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur. (1 pt)

Fonction logarithme népérien

Exercice 2 (4 points).

- Résoudre dans $\mathbb{R}$:
(a) l'équation $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln 4$; (0,75 pt)
(b) l'inéquation $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 \leq 0$. (0,75 pt)
- Calculer les limites suivantes :
(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 1) - \ln x)$; (0,5 pt)
(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. (0,5 pt)
- Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - 1 - \ln x$.
(a) Étudier les variations de h et en déduire que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x - 1$. (0,75 pt)
(b) En déduire que pour tout $x > 0$: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$, puis que pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$. (0,75 pt)

Fonction exponentielle et suites

Exercice 3 (5 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{-x}$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.

- (a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de g . (0,75 pt)
(b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α , et que $1 < \alpha < 2$. (0,5 pt)
- Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$, on a $f(x) \in [1, 2]$. (0,5 pt)
- (a) Montrer que pour tout $x \in [1, 2] : |f'(x)| \leq \frac{1}{e}$. (0,25 pt)
(b) En déduire, à l'aide du théorème des accroissements finis, que pour tout $x \in [1, 2] : |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$. (0,75 pt)
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \in [1, 2]$. (0,5 pt)
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite. (1 pt)
(c) Déterminer un entier n pour lequel u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. (0,75 pt)

Problème d'analyse

Exercice 4 (7 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

Partie A.

- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement les résultats. (0,5 pt)
- Montrer que pour tout réel $x : f(-x) + f(x) = 1$. En déduire que le point $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$. (0,75 pt)
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel $x : f'(x) = f(x)(1 - f(x))$. Dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point Ω . (0,5 pt)
- (a) Montrer que pour tout réel $x : 0 < f'(x) \leq \frac{1}{4}$. (0,5 pt)
(b) Montrer que pour tout $x \geq 0 : f(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$, et en déduire la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (T) sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

Partie B.

- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, et que pour tout $y \in]0, 1[: f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$. (1 pt)
- Tracer (T) , $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} dans le même repère. (0,5 pt)

Partie C.

- Montrer que pour tout $y \in]0, 1[: f^{-1}(1 - y) = -f^{-1}(y)$. (0,5 pt)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n f^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right)$. (0,5 pt)
- Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que pour tout réel $x : |f(x) - \frac{1}{2}| \leq |x| \frac{1}{4}$. (0,5 pt)