

Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1 : limites, continuité, dérivation et suites numériques

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 4 + 5 + 5 + 6 points. Toute réponse doit être justifiée.

Limites et continuité

Exercice 1 (4 points).

1. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$; (0,75 pt)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$; (0,75 pt)

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$. (0,75 pt)

2. Soit f la fonction définie sur $[-3, +\infty[\setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et préciser ce prolongement. (0,75 pt)

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x + 1$.

(a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0, 1]$. (0,5 pt)

(b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} . (0,5 pt)

Dérivation et accroissements finis

Exercice 2 (5 points). Partie A. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \rightarrow \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$, montrer que :

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

(1,25 pt)

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $2\sqrt{n+1} - 2 < S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$. (1,5 pt)

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$. (0,75 pt)

Partie B. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \in [a, b]$.

1. Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $cf'(c) = f(c)$. (1 pt)

2. Interpréter géométriquement ce résultat à l'aide de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse c . (0,5 pt)

Suites numériques

Exercice 3 (5 points). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right),$$

et l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2}{u_n}$.

1. Calculer u_1 et v_1 . (0,5 pt)
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. (0,25 pt)
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. (0,5 pt)
(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n < \sqrt{2} < u_n$. (0,5 pt)
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante et que la suite (v_n) est strictement croissante. (1 pt)
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$, puis que $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$. (0,75 pt)
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < \sqrt{2} - v_n \leq u_n - \sqrt{2}$. (0,5 pt)
(c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et préciser leur limite commune. (0,25 pt)
5. Déterminer un entier n pour lequel $u_n - v_n \leq 10^{-3}$. Que peut-on alors dire des nombres u_n et v_n ? (0,75 pt)

Étude d'une fonction irrationnelle

Exercice 4 (6 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,25 pt)
(b) Montrer que pour tout $x \in D_f$, on a $-1 - x \in D_f$ et $f(-1 - x) = f(x)$. En déduire que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$. (0,5 pt)
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)
3. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$. (0,75 pt)
4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ) sur $[0, +\infty[$. (1 pt)
5. (a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. (0,5 pt)
(b) Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in [0, +\infty[$. (0,75 pt)
6. Tracer (Δ) , $(\mathcal{C})$ (on utilisera la symétrie de la question 1) et la courbe de f^{-1} . (0,5 pt)
7. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
(a) Montrer que g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. (0,5 pt)
(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $0 < \sqrt{n^2 + n} - n < \frac{1}{2}$, puis que $E(\sqrt{n^2 + n}) = n$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x . (0,5 pt)