

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1 : limites, continuité, dérivation et suites numériques

Limites et continuité

Solution 1.

- (a) Forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée : pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + x} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1}$. Comme $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \frac{3}{2}$.

(b) Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq 0$ proche de 0 : $\frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \times \frac{4x^2}{x \sin x} = 4 \times \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \times \frac{x}{\sin x}$. En posant $u = 2x \rightarrow 0$, $\frac{1 - \cos u}{u^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ (limite usuelle), et $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = 4 \times \frac{1}{2} \times 1 = 2$. (On peut aussi écrire $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, d'où le quotient $2 \frac{\sin x}{x} \rightarrow 2$.)

(c) Forme indéterminée $-\infty + \infty$. Pour $x \leq -2$, on a $x < 0$ donc $\sqrt{x^2 + 2x} = |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = -x \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$, et $x + \sqrt{x^2 + 2x} = \frac{(x^2) - (x^2 + 2x)}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{-2x}{x + x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = -\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}$. Comme $\frac{2}{x} \rightarrow 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x}) = -\frac{2}{2} = -1$.
- Pour $x \in [-3, +\infty[\setminus \{1\}]$, en multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{x+3} + 2$: $f(x) = \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$: f admet une limite finie en 1, elle est prolongeable par continuité en 1. Le prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[-3, +\infty[$ par $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$ (en particulier $\tilde{f}(1) = \frac{1}{4}$).
- (a) h est une fonction polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Sur $]0, 1[$, $h'(x) < 0$: h est strictement décroissante sur $[0, 1]$. De plus $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = -1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (fonction continue et strictement monotone), l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$.

(b) $h(0,3) = 0,027 - 0,9 + 1 = 0,127 > 0$ et $h(0,4) = 0,064 - 1,2 + 1 = -0,136 < 0$. Comme h est strictement décroissante sur $[0, 1]$, on en déduit $0,3 < \alpha < 0,4$.

Dérivation et accroissements finis

Solution 2.

Partie A.

- La fonction $\varphi : t \rightarrow \sqrt{t}$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ (car $k \geq 1 > 0$), avec $\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que $\varphi(k+1) - \varphi(k) = \varphi'(c)(k+1 - k)$, c'est-à-dire $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$. Or $k < c < k+1$ et la fonction racine carrée est strictement croissante, donc $\sqrt{k} < \sqrt{c} < \sqrt{k+1}$, puis $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$ (tous ces nombres sont strictement positifs). D'où l'encadrement demandé.

2. **Minoration.** En sommant l'inégalité de droite $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, la somme de gauche est télescopique : $\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$, et l'on obtient $\sqrt{n+1} - 1 < \frac{1}{2}S_n$, soit $S_n > 2\sqrt{n+1} - 2$.

Majoration. Pour $n = 1$, $S_1 = 1 = 2\sqrt{1} - 1$: l'inégalité $S_1 \leq 2\sqrt{1} - 1$ est vraie. Pour $n \geq 2$, on somme l'inégalité de gauche $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ pour $k = 1, \dots, n-1$: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} - 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(S_n - 1) < \sqrt{n} - 1$, d'où $S_n < 2\sqrt{n} - 1$.

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $2\sqrt{n+1} - 2 < S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$.

3. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = +\infty$ et $S_n > 2\sqrt{n+1} - 2$, le théorème de comparaison donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. En divisant l'encadrement par $\sqrt{n} > 0$: $2\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or $\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$: les deux bornes tendent vers 2. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$.

Partie B.

- La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $[a, b]$ (car $0 < a$), donc $g = f \times \frac{1}{x}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$. De plus $g(a) = \frac{f(a)}{a} = 0$ et $g(b) = \frac{f(b)}{b} = 0$, donc $g(a) = g(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $\frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$, soit $cf'(c) = f(c)$.
- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse c a pour équation $y = f'(c)(x - c) + f(c)$. Pour $x = 0$, elle donne $y = -cf'(c) + f(c) = 0$ d'après la question 1. Donc cette tangente passe par l'origine O du repère : il existe un point de la courbe de f (d'abscisse dans $]a, b[$) en lequel la tangente passe par O .

Suites numériques

Solution 3.

- $u_1 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2}$ et $v_1 = \frac{2}{u_1} = \frac{4}{3}$.
- (a) Par récurrence : $u_0 = 2 > 0$. Si $u_n > 0$, alors $\frac{2}{u_n} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) > 0$. Donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en particulier u_{n+1} et v_n sont bien définis).
(b) $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.
(c) Montrons par récurrence que $u_n > \sqrt{2}$. Initialisation : $u_0 = 2 > \sqrt{2}$ car $4 > 2$. Hérédité : si $u_n > \sqrt{2}$, alors $u_n \neq \sqrt{2}$, donc $(u_n - \sqrt{2})^2 > 0$, et $2u_n > 0$; d'après (b), $u_{n+1} - \sqrt{2} > 0$. Donc $u_n > \sqrt{2}$ pour tout n . Enfin, $u_n > \sqrt{2} > 0$ donne $v_n = \frac{2}{u_n} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Ainsi $v_n < \sqrt{2} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$. Comme $u_n > \sqrt{2}$, $u_n^2 > 2$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$: (u_n) est strictement décroissante. Ensuite $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1}} - \frac{2}{u_n} = \frac{2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}} > 0$ car $u_n - u_{n+1} > 0$ et $u_n u_{n+1} > 0$: (v_n) est strictement croissante.
(a) D'après 2(b) et 2(c), $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n - \sqrt{2}}{2u_n} \times (u_n - \sqrt{2}) > 0$. Or $0 < u_n - \sqrt{2} < u_n$, donc $0 < \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n} < 1$ et $u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$. Par récurrence immédiate, $0 < u_n - \sqrt{2} \leq (\frac{1}{2})^n (u_0 - \sqrt{2}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2^n}$. Comme $\sqrt{2} > 1$, $2 - \sqrt{2} < 1$, d'où $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$.
(b) $\sqrt{2} - v_n = \sqrt{2} - \frac{2}{u_n} = \frac{\sqrt{2}u_n - 2}{u_n} = \frac{\sqrt{2}(u_n - \sqrt{2})}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{u_n} \times (u_n - \sqrt{2})$. Comme $0 < \sqrt{2} < u_n$, on a $0 < \frac{\sqrt{2}}{u_n} < 1$, et $u_n - \sqrt{2} > 0$; donc $0 < \sqrt{2} - v_n \leq u_n - \sqrt{2}$.
(c) (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante, et $0 < u_n - v_n = (u_n - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - v_n) \leq 2(u_n - \sqrt{2}) \leq \frac{2}{2^n}$. Comme $\frac{2}{2^n} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim(u_n - v_n) = 0$: les

suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite ℓ . De $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, on tire $\lim u_n = \sqrt{2}$; donc $\ell = \sqrt{2}$.

5. On a $u_n - v_n \leq \frac{2}{2^n}$. Il suffit donc que $\frac{2}{2^n} \leq 10^{-3}$, soit $2^n \geq 2000$. Comme $2^{10} = 1024 < 2000$ et $2^{11} = 2048 \geq 2000$, l'entier $n = 11$ convient : $u_{11} - v_{11} \leq 10^{-3}$. Puisque $v_{11} < \sqrt{2} < u_{11}$, les nombres v_{11} et u_{11} sont respectivement une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Étude d'une fonction irrationnelle

Solution 4.

- (a) $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 + x = x(x+1) \geq 0$, soit $x \leq -1$ ou $x \geq 0$: $D_f =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.
 (b) Si $x \in D_f$, alors $(-1-x)^2 + (-1-x) = 1 + 2x + x^2 - 1 - x = x^2 + x \geq 0$, donc $-1-x \in D_f$ et $f(-1-x) = \sqrt{x^2 + x} = f(x)$. Les points $M(x, f(x))$ et $M'(-1-x, f(-1-x))$ de $(\mathcal{C})$ ont la même ordonnée et le milieu de $[MM']$ a pour abscisse $\frac{x+(-1-x)}{2} = -\frac{1}{2}$: M' est le symétrique de M par rapport à la droite $x = -\frac{1}{2}$. Cette droite est donc un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$.
- Pour $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$. Or $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0, et $(\mathcal{C})$ admet au point $O(0,0)$ une demi-tangente verticale (dirigée vers le haut). Par symétrie, il en est de même au point d'abscisse -1 .
- Sur $]0, +\infty[$, $x \rightarrow x^2 + x$ est dérivable et strictement positive, donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable avec $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} > 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (car $x^2 + x \rightarrow +\infty$). Tableau de variations sur $[0, +\infty[$: f est continue en 0, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de $f(0) = 0$ vers $+\infty$.
- Pour $x > 0$, avec la quantité conjuguée : $f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \frac{x^2+x-(x+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + \frac{1}{2})) = 0$: la droite $(\Delta) : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. De plus, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - (x + \frac{1}{2}) < 0$: $(\mathcal{C})$ est strictement au-dessous de (Δ) sur $[0, +\infty[$.
- (a) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[= [0, +\infty[$ (théorème de la bijection).
 (b) Soit $y \geq 0$ et $x \geq 0$. $y = f(x) \Leftrightarrow y^2 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - y^2 = 0$. Ce trinôme en x a pour discriminant $1 + 4y^2 > 0$ et pour racines $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2}$; la seule racine positive ou nulle est $\frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2}$ (l'autre est strictement négative). Donc $f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{1+4y^2}-1}{2}$ pour tout $y \in [0, +\infty[$.
- Tracé : demi-tangente verticale en O et au point $A(-1,0)$, courbe croissante sur $[0, +\infty[$ au-dessous de (Δ) , symétrique par rapport à la droite $x = -\frac{1}{2}$ (sur $] -\infty, -1]$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de la droite $y = -x - \frac{1}{2}$, symétrique de (Δ)). La courbe de f^{-1} est la symétrique de la partie de $(\mathcal{C})$ située dans $[0, +\infty[$ par rapport à la première bissectrice $y = x$; elle admet en O une demi-tangente horizontale.
- (a) g est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}$. Or $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x = (2\sqrt{x^2+x})^2$ et les deux nombres sont positifs, donc $2x+1 > 2\sqrt{x^2+x}$ et $g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur

$[0, +\infty[$.

(b) D'après la question 4, $g(x) = (f(x) - (x + \frac{1}{2})) + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ pour tout $x \geq 0$, et $g(0) = 0$. Pour $n \geq 1$, la stricte croissance de g donne $g(n) > g(0) = 0$. Ainsi $0 < g(n) = \sqrt{n^2 + n} - n < \frac{1}{2}$. On en déduit $n < \sqrt{n^2 + n} < n + \frac{1}{2} < n + 1$: l'entier n est le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{n^2 + n}$, c'est-à-dire $E(\sqrt{n^2 + n}) = n$.