

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 2 (examen blanc) : mathématiques financières et révision générale

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte trois exercices indépendants, dans l'esprit de l'examen national. Barème : $5 + 6 + 9$ points. On donne $\ln 1,5 \approx 0,4055$, $\ln 1,05 \approx 0,0488$, $1,05^3 = 1,157625$, $1,05^{\frac{1}{12}} \approx 1,00407$, $1,04^3 = 1,124864$, $e \approx 2,718$, $e^{0,5} \approx 1,649$ et $e^{0,6} \approx 1,822$. Les montants seront arrondis au centime.

Calcul des probabilités

Exercice 1 (5 points). Une agence bancaire a reçu 8 dossiers de crédit, dont 3 présentent une anomalie. Un auditeur choisit au hasard et simultanément 2 dossiers parmi les 8 pour les contrôler.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « aucun des deux dossiers contrôlés ne présente d'anomalie ». (0,75 pt)
2. En déduire la probabilité de l'événement B : « au moins un des deux dossiers contrôlés présente une anomalie ». (0,5 pt)
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de dossiers présentant une anomalie parmi les deux dossiers contrôlés.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X . (1,25 pt)
 - (b) Calculer l'espérance $E(X)$. (0,5 pt)
4. Par ailleurs, on estime que chaque dossier de crédit déposé dans cette agence a une probabilité 0,1 d'être refusé, indépendamment des autres dossiers. On considère 5 dossiers déposés et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de dossiers refusés parmi ces 5.
 - (a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. (0,5 pt)
 - (b) Calculer $P(Y = 2)$ et $P(Y \geq 1)$ (arrondir à 10^{-4} près). (1 pt)
 - (c) Calculer $E(Y)$ et interpréter ce résultat. (0,5 pt)

Mathématiques financières

Exercice 2 (6 points). Partie A : placement. Une entreprise place 80 000 DH sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 5%. On note C_n la valeur acquise après n années.

1. Exprimer C_n en fonction de n et calculer la valeur acquise après 3 ans. (0,75 pt)
2. Au bout de combien d'années la valeur acquise dépassera-t-elle 120 000 DH ? (1 pt)
3. Calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 5% (arrondir à $10^{-3}\%$ près) et le comparer au taux mensuel proportionnel. (0,75 pt)

Partie B : emprunt. Pour financer l'achat d'une machine, cette entreprise emprunte 150 000 DH, remboursables par 3 annuités constantes de fin d'année, au taux annuel de 4%.

1. Montrer que l'annuité vaut $a \approx 54\,052,28$ DH. (1 pt)
2. Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt (capital restant dû en début de période, intérêt, amortissement, annuité). (1,5 pt)
3. Calculer le coût total du crédit. (0,5 pt)
4. Vérifier que le deuxième amortissement s'obtient en multipliant le premier par 1,04. Expliquer pourquoi. (0,5 pt)

Problème d'analyse : étude d'une fonction exponentielle et calcul d'aire

Exercice 3 (9 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,75 pt)
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. (1 pt)
3. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ) . (0,75 pt)
4. Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$. (0,75 pt)
5. Dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. (0,5 pt)
7. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in]-\infty, 0[$. (0,75 pt)
(b) Vérifier que $-0,6 < \alpha < -0,5$. (0,5 pt)
8. Tracer (Δ) , (T) et $(\mathcal{C})$ (on prendra $f(-1) \approx -1,7$, $f(1) \approx 1,4$ et $f(3) \approx 1,1$). (1 pt)

Partie B.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$. (1 pt)
2. En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près). (1 pt)