

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 2 (examen blanc) : mathématiques financières et révision générale

Calcul des probabilités

Solution 1.

L'auditeur choisit simultanément 2 dossiers parmi 8 : l'univers est l'ensemble des combinaisons de 2 dossiers parmi 8, tous équiprobables, et $\text{card } \Omega = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$.

1. A est réalisé lorsque les deux dossiers sont choisis parmi les 5 dossiers sans anomalie : $\text{card } A = \binom{5}{2} = 10$, donc $P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.

2. B est l'événement contraire de A : $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$.

3. (a) X prend les valeurs 0, 1 et 2.

$$P(X = 0) = P(A) = \frac{5}{14} ;$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{5}{1}}{28} = \frac{3 \times 5}{28} = \frac{15}{28} \text{ (un dossier avec anomalie parmi 3 et un dossier sans anomalie parmi 5) ;}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{28} = \frac{3}{28}.$$

$$\text{Vérification : } \frac{10}{28} + \frac{15}{28} + \frac{3}{28} = \frac{28}{28} = 1.$$

$$(b) E(X) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{15}{28} + \frac{6}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

4. (a) On répète 5 fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli dont le succès « le dossier est refusé » a pour probabilité $p = 0,1$. La variable Y qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,1$.

$$(b) P(Y = 2) = \binom{5}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^3 = 10 \times 0,01 \times 0,729 = 0,0729.$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,9^5 = 1 - 0,59049 = 0,40951 \approx 0,4095.$$

(c) $E(Y) = np = 5 \times 0,1 = 0,5$. Interprétation : sur un grand nombre de séries de 5 dossiers, il y a en moyenne 0,5 dossier refusé par série, soit un dossier refusé pour dix dossiers déposés.

Mathématiques financières

Solution 2.

Partie A : placement.

1. À intérêts composés, le capital est multiplié par $1 + 0,05 = 1,05$ chaque année : (C_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $C_0 = 80\,000$, donc $C_n = 80\,000 \times 1,05^n$. Après 3 ans : $C_3 = 80\,000 \times 1,05^3 = 80\,000 \times 1,157625 = 92\,610$ DH.

2. On cherche le plus petit entier n tel que $C_n > 120\,000$: $80\,000 \times 1,05^n > 120\,000 \iff 1,05^n > 1,5 \iff n \ln 1,05 > \ln 1,5 \iff n > \frac{\ln 1,5}{\ln 1,05}$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante et $\ln 1,05 > 0$). Or $\frac{\ln 1,5}{\ln 1,05} \approx 0, \frac{4055}{0,0488} \approx 8,31$, donc $n \geq 9$. La valeur acquise dépassera 120 000 DH au bout de 9 ans.

3. Le taux mensuel équivalent t_m vérifie $(1 + t_m)^{12} = 1,05$, donc $t_m = 1,05^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 1,00407 - 1 = 0,00407$, soit environ 0,407% par mois. Le taux mensuel proportionnel est $5\frac{\%}{12} \approx 0,417\%$. Le taux équivalent est légèrement inférieur au taux proportionnel, car à intérêts composés les intérêts mensuels sont eux-mêmes capitalisés.

Partie B : emprunt.

1. Le capital emprunté est la valeur actuelle des 3 annuités : $C = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-3}}{i}$ avec $C = 150\,000$ et $i = 0,04$, d'où $a = \frac{Ci}{1-1,04^{-3}}$. En multipliant numérateur et dénominateur par $1,04^3$: $a = \frac{150\,000 \times 0,04 \times 1,04^3}{1,04^3 - 1} = \frac{6\,000 \times 1,124864}{0,124864} = \frac{6\,749,184}{0,124864} \approx 54\,052,28$ DH.
2. Pour chaque année : intérêt = $0,04 \times$ capital restant dû, amortissement = $a -$ intérêt, nouveau capital restant dû = capital restant dû - amortissement.
- Année 1 : intérêt $0,04 \times 150\,000 = 6\,000$; amortissement $54\,052,28 - 6\,000 = 48\,052,28$; capital restant dû $150\,000 - 48\,052,28 = 101\,947,72$.
- Année 2 : intérêt $0,04 \times 101\,947,72 \approx 4\,077,91$; amortissement $54\,052,28 - 4\,077,91 = 49\,974,37$; capital restant dû $101\,947,72 - 49\,974,37 = 51\,973,35$.
- Année 3 : intérêt $0,04 \times 51\,973,35 \approx 2\,078,93$; amortissement $54\,052,28 - 2\,078,93 = 51\,973,35$, qui solde exactement le capital restant dû.

Année	Capital restant dû	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	150 000,00	6 000,00	48 052,28	54 052,28
2	101 947,72	4 077,91	49 974,37	54 052,28
3	51 973,35	2 078,93	51 973,35	54 052,28

Vérification : la somme des amortissements vaut $48\,052,28 + 49\,974,37 + 51\,973,35 = 150\,000$ DH, le capital emprunté.

3. Total remboursé : $3 \times 54\,052,28 = 162\,156,84$ DH. Le coût du crédit est $162\,156,84 - 150\,000 = 12\,156,84$ DH (c'est aussi la somme des intérêts : $6\,000 + 4\,077,91 + 2\,078,93 = 12\,156,84$).
4. $48\,052,28 \times 1,04 = 49\,974,37$: on retrouve bien le deuxième amortissement.
- Explication : notons K_{k-1} le capital restant dû au début de l'année k , $I_k = iK_{k-1}$ l'intérêt et $m_k = a - I_k$ l'amortissement. Comme $K_k = K_{k-1} - m_k$: $m_{k+1} = a - iK_k = a - i(K_{k-1} - m_k) = m_k + im_k = (1+i)m_k$. Les amortissements forment donc une suite géométrique de raison $1+i = 1,04$.

Problème d'analyse : étude d'une fonction exponentielle et calcul d'aire

Solution 3.

Partie A.

1. Quand $x \rightarrow -\infty$: $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (car $-x \rightarrow +\infty$) et $x \rightarrow -\infty$, donc $xe^{-x} \rightarrow -\infty$ par produit, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
2. Pour tout réel x , $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 1 = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$, la droite $(\Delta) : y = 1$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

3. $f(x) - 1 = x e^{-x}$ et $e^{-x} > 0$, donc $f(x) - 1$ a le signe de x : sur $]0, +\infty[$, $f(x) > 1$ et $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) ; sur $] - \infty, 0[$, $f(x) < 1$ et $(\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ) ; les deux se coupent au point $(0, 1)$.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables, avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 0 = (1 - x)e^{-x}$.

5. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - x$: $f'(x) > 0$ pour $x < 1$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$. De plus $f(1) = e^{-1} + 1 = 1 + \frac{1}{e}$.

Tableau de variations : f est strictement croissante sur $] - \infty, 1]$, de $-\infty$ à $1 + \frac{1}{e}$, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, de $1 + \frac{1}{e}$ à 1 (limite non atteinte). Elle admet un maximum égal à $1 + \frac{1}{e} \approx 1,37$ en $x = 1$.

6. $f(0) = 0 + 1 = 1$ et $f'(0) = (1 - 0)e^0 = 1$, donc $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $(T) : y = x + 1$.

7. (a) Sur $[1, +\infty[$, $f(x) \geq 1 > 0$ d'après le tableau de variations : l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.

Sur $] - \infty, 1]$, f est continue et strictement croissante. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, il existe un réel $b < 0$ tel que $f(b) < 0$; et $f(0) = 1 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur $[b, 0]$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]b, 0[$; cette solution est unique sur $] - \infty, 1]$ car f y est strictement croissante.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $\alpha \in]b, 0[\subset] - \infty, 0[$.

(b) $f(-0,6) = -0,6e^{0,6} + 1 \approx -0,6 \times 1,822 + 1 \approx -0,093 < 0$ et $f(-0,5) = -0,5e^{0,5} + 1 \approx -0,5 \times 1,649 + 1 \approx 0,176 > 0$. Ainsi $f(-0,6) < f(\alpha) < f(-0,5)$ et, f étant strictement croissante sur $] - \infty, 1]$, on obtient $-0,6 < \alpha < -0,5$.

8. Tracé : on place l'asymptote $(\Delta) : y = 1$, la tangente $(T) : y = x + 1$ au point $(0, 1)$ (qui est aussi le point où $(\mathcal{C})$ traverse (Δ)), le maximum $(1, 1 + \frac{1}{e}) \approx (1; 1,37)$ avec sa tangente horizontale, le point d'abscisse $\alpha \approx -0,55$ où $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses, et les points $(-1; -1,7)$ et $(3; 1,1)$. À gauche, la courbe descend vers $-\infty$; à droite, elle se rapproche de (Δ) en restant au-dessus.

Partie B.

1. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$; alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Ces fonctions sont dérivables à dérivées continues sur $[0, 1]$, et la formule d'intégration par parties donne : $\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + (-\frac{1}{e} + 1) = 1 - \frac{2}{e}$.

2. Sur $[0, 1]$, $f(x) - 1 = x e^{-x} \geq 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) (question 3). L'aire du domaine est donc, en unités d'aire, $\int_0^1 (f(x) - 1) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$. L'unité graphique étant 2 cm sur chaque axe, l'unité d'aire vaut 4 cm², d'où une aire égale à $4(1 - \frac{2}{e}) = 4 - \frac{8}{e}$ cm². Valeur approchée : $4 - \frac{8}{2,718} \approx 4 - 2,943 \approx 1,06$ cm².