

Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 1 : calcul intégral, dénombrement et probabilités

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 6 + 9 points. On donne $e \approx 2,718$, $\frac{1}{e} \approx 0,37$ et $0,96^9 \approx 0,6925$. Les probabilités demandées seront données sous forme de fraction irréductible ou arrondies à 10^{-4} près.

Calcul intégral

Exercice 1 (5 points).

- Calculer les intégrales suivantes :
 - $I = \int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$; (0,5 pt)
 - $J = \int_1^e \left(\frac{2}{x} + 1\right) dx$. (0,5 pt)
- Calculer $K = \int_0^1 x e^{x^2} dx$ (on pourra reconnaître une expression de la forme $u' e^u$). (1 pt)
- À l'aide d'une intégration par parties, calculer $L = \int_0^1 x e^{2x} dx$. (1,25 pt)
- Montrer que la fonction $H : x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$, puis calculer $M = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. (0,75 pt)
- Calculer la valeur moyenne de la fonction $g : x \rightarrow x^2 + 1$ sur l'intervalle $[0, 3]$. (1 pt)

Dénombrement et probabilités

Exercice 2 (6 points). Partie A. Une agence bancaire compte 10 conseillers : 6 femmes et 4 hommes. Le directeur choisit au hasard une équipe de 3 conseillers pour une formation.

- Combien d'équipes différentes peut-il former ? (0,5 pt)
- Combien d'équipes comportent exactement deux femmes ? (0,5 pt)
- Calculer la probabilité de l'événement E : « l'équipe comporte au moins un homme ». (1 pt)

Partie B. Une entreprise vend un article en ligne et en magasin. Une étude montre que 60% des ventes sont réalisées en ligne. Parmi les articles vendus en ligne, 5% sont retournés par le client ; parmi les articles vendus en magasin, 2,5% sont retournés. On choisit au hasard un article vendu et on note L l'événement « l'article a été vendu en ligne » et R l'événement « l'article a été retourné ».

- Représenter la situation par un arbre pondéré, puis montrer que $P(R) = 0,04$. (1,25 pt)
- Un article a été retourné. Calculer la probabilité qu'il ait été vendu en ligne. (0,75 pt)
- Les événements L et R sont-ils indépendants ? Justifier. (0,5 pt)
- On choisit au hasard 10 articles vendus ; on admet que les choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'articles retournés parmi ces 10 articles.
 - Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, et calculer $E(X)$.

(0,5 pt)

(b) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 2)$ (arrondir à 10^{-4} près). (1 pt)

Étude d'une fonction logarithme et calcul d'aires

Exercice 3 (9 points). Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat. (0,75 pt)
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat. (0,75 pt)
3. Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$. (0,75 pt)
4. Dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$. (0,75 pt)
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e . (0,75 pt)
7. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ (on prendra $f(e) \approx 0,74$, $f(3) \approx 0,70$ et $f(0,5) \approx 0,61$). (1 pt)

Partie B.

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. (0,75 pt)
2. Calculer $\int_1^e f(x) dx$. (0,75 pt)
3. En déduire l'aire $\mathcal{A}_1$, en cm^2 , du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (0,75 pt)
4. Soit $(\mathcal{H})$ la courbe de la fonction $h : x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{H})$, puis calculer l'aire $\mathcal{A}_2$, en cm^2 , du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{H})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (1 pt)