

Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 1 : calcul intégral, dénombrement et probabilités

Calcul intégral

Solution 1.

- (a) Une primitive de $x \rightarrow 3x^2 - 2x + 1$ est $x \rightarrow x^3 - x^2 + x$, donc $I = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$.
 (b) Sur $[1, e]$, une primitive de $x \rightarrow \frac{2}{x} + 1$ est $x \rightarrow 2 \ln x + x$, donc $J = [2 \ln x + x]_1^e = (2 \ln e + e) - (2 \ln 1 + 1) = (2 + e) - 1 = e + 1$.
- On pose $u(x) = x^2$; alors $u'(x) = 2x$ et $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$. Une primitive de $x \rightarrow xe^{x^2}$ est donc $x \rightarrow \frac{1}{2}e^{x^2}$ et $K = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e-1}{2}$.
- On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2x}$; alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0, 1]$, et la formule d'intégration par parties donne : $L = \left[x \times \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$. Donc $L = \frac{e^2+1}{4}$.
- H est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, avec $(u^2)' = 2u'u$ pour $u = \ln$: $H'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{\ln x}{x}$. Donc H est une primitive de $x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et $M = H(e) - H(1) = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
- La valeur moyenne de g sur $[0, 3]$ est $\mu = \frac{1}{3-0} \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{27}{3} + 3\right) = \frac{1}{3} \times 12 = 4$.

Dénombrement et probabilités

Solution 2.

Partie A.

- Une équipe est une partie de 3 éléments parmi 10 (l'ordre n'intervient pas) : il y a $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ équipes possibles.
- On choisit 2 femmes parmi 6 et 1 homme parmi 4 : $\binom{6}{2} \times \binom{4}{1} = 15 \times 4 = 60$ équipes.
- L'événement contraire $\overline{E}$ est « l'équipe ne comporte aucun homme », c'est-à-dire « les trois conseillers sont des femmes » : $\text{card } \overline{E} = \binom{6}{3} = 20$. Les équipes étant équiprobables, $P(\overline{E}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$, donc $P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Partie B.

- Arbre pondéré : la première branche sépare L (probabilité 0,6) et $\overline{L}$ (probabilité 0,4) ; à partir de L , on a R avec la probabilité $P(R | L) = 0,05$ et $\overline{R}$ avec 0,95 ; à partir de $\overline{L}$, on a R avec $P(R | \overline{L}) = 0,025$ et $\overline{R}$ avec 0,975.
 Les événements L et $\overline{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des proba-

- bilités totales : $P(R) = P(L \cap R) + P(\bar{L} \cap R) = P(L) \times P(R | L) + P(\bar{L}) \times P(R | \bar{L}) = 0,6 \times 0,05 + 0,4 \times 0,025 = 0,03 + 0,01 = 0,04$.
2. On cherche $P(L | R) = \frac{P(L \cap R)}{P(R)} = \frac{0,03}{0,04} = \frac{3}{4} = 0,75$.
3. $P(L) \times P(R) = 0,6 \times 0,04 = 0,024$ alors que $P(L \cap R) = 0,03$. Comme $P(L \cap R) \neq P(L) \times P(R)$, les événements L et R ne sont pas indépendants. (On peut aussi remarquer que $P(L | R) = 0,75 \neq P(L) = 0,6$.)
4. (a) On répète 10 fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli dont le succès « l'article est retourné » a pour probabilité $p = P(R) = 0,04$. La variable X qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,04$, et $E(X) = np = 10 \times 0,04 = 0,4$.
- (b) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,04^0 \times 0,96^{10} = 0,96^{10} = 0,96 \times 0,96^9 \approx 0,96 \times 0,6925 \approx 0,6648$.
 $P(X = 1) = \binom{10}{1} \times 0,04 \times 0,96^9 = 10 \times 0,04 \times 0,96^9 \approx 0,4 \times 0,6925 \approx 0,2770$.
 $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,6648 - 0,2770 \approx 0,0582$.

Étude d'une fonction logarithme et calcul d'aires

Solution 3.

Partie A.

1. $f(x) = (1 + \ln x) \times \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow 0^+$: $\ln x \rightarrow -\infty$ donc $1 + \ln x \rightarrow -\infty$, et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
 Interprétation : l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$) est une asymptote verticale à (C) .
2. Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 Interprétation : l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.
3. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annule pas). Avec $u(x) = 1 + \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$: $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$.
4. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-\ln x$: $f'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$. De plus $f(1) = \frac{1+0}{1} = 1$.
 Tableau de variations : f est strictement croissante sur $]0, 1]$, de $-\infty$ à 1, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, de 1 à 0 (limite non atteinte). Elle admet un maximum égal à 1 en $x = 1$.
5. Pour $x > 0$: $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. L'équation $f(x) = 0$ admet l'unique solution $x = \frac{1}{e}$.
 Signe : comme $x > 0$, $f(x)$ a le signe de $1 + \ln x$, et $1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \frac{1}{e}$ (ln strictement croissante). Donc $f(x) < 0$ sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f(\frac{1}{e}) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.
6. $f(e) = \frac{1+1}{e} = \frac{2}{e}$ et $f'(e) = -\frac{\ln e}{e^2} = -\frac{1}{e^2}$. Donc $(T) : y = -\frac{1}{e^2}(x - e) + \frac{2}{e} = -\frac{x}{e^2} + \frac{1}{e} + \frac{2}{e}$, soit $(T) : y = -\frac{x}{e^2} + \frac{3}{e}$.
7. Tracé : on place l'asymptote verticale $x = 0$, l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$, le point $(\frac{1}{e}, 0) \approx (0,37; 0)$ où (C) coupe l'axe des abscisses, le maximum $(1, 1)$ (tangente horizontale), le point $(e, \frac{2}{e}) \approx (2,72; 0,74)$ avec sa tangente (T) , ainsi que les points $(0,5; 0,61)$ et $(3; 0,70)$.

La courbe descend vers $-\infty$ près de l'axe des ordonnées, monte jusqu'au maximum $(1, 1)$, puis décroît lentement vers l'axe des abscisses en restant au-dessus.

Partie B.

1. F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, d'après la question 4 de l'exercice 1 (dérivée de $\frac{1}{2}(\ln x)^2$) : $F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{1+\ln x}{x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. $\int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = (\ln e + \frac{1}{2}(\ln e)^2) - (\ln 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2) = (1 + \frac{1}{2}) - 0 = \frac{3}{2}$.
3. Sur $[1, e]$, on a $x \geq 1 > \frac{1}{e}$ donc $f(x) \geq 0$ (question 5 de la partie A). L'aire du domaine est donc, en unités d'aire, $\int_1^e f(x) dx = \frac{3}{2}$. L'unité graphique étant 2 cm sur chaque axe, l'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, d'où $\mathcal{A}_1 = \frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{ cm}^2$.
4. Pour $x > 0$: $f(x) - h(x) = \frac{1+\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$, qui a le signe de $\ln x$. Donc $(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{H})$ sur $]0, 1[$, les deux courbes se coupent au point $(1, 1)$, et $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{H})$ sur $]1, +\infty[$.
Sur $[1, e]$, $f(x) - h(x) \geq 0$, donc l'aire cherchée est, en unités d'aire, $\int_1^e (f(x) - h(x)) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ (c'est l'intégrale M de l'exercice 1). Ainsi $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm}^2$.