

Devoir surveillé n°2 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 2 : fonctions logarithmiques et exponentielles

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 5 + 10 points. On donne $\ln 2 \approx 0,6931$, $\ln 1,04 \approx 0,0392$, $1,04^{10} \approx 1,48024$, $e \approx 2,718$, $e^{-1,1} \approx 0,333$ et $e^{-1,2} \approx 0,301$.

Calculs avec les fonctions logarithme et exponentielle

Exercice 1 (5 points).

- Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - l'équation $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 4$; (0,75 pt)
 - l'équation $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; (0,75 pt)
 - l'inéquation $\ln(2x-1) \leq 0$. (0,75 pt)
- Calculer les limites suivantes :
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2x)$; (0,5 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x}$; (0,5 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^x$. (0,5 pt)
- Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :
 - $f(x) = x^2 \ln x$ sur $]0, +\infty[$; (0,5 pt)
 - $g(x) = (x+1)e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
- Simplifier le nombre $A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) + e^{\ln 4}$. (0,25 pt)

Suite géométrique et modèle exponentiel : chiffre d'affaires d'une entreprise

Exercice 2 (5 points). Une entreprise a réalisé un chiffre d'affaires de 500 000 DH en 2025. Elle prévoit une hausse de 4% par an de son chiffre d'affaires. On note u_n le chiffre d'affaires prévu pour l'année 2025 + n , exprimé en milliers de dirhams ; ainsi $u_0 = 500$.

- Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
- Justifier que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison, puis exprimer u_n en fonction de n . (0,75 pt)
- Calculer le chiffre d'affaires prévu pour 2035 (arrondir au millier de dirhams). (0,5 pt)
- Déterminer à partir de quelle année le chiffre d'affaires dépassera le double de celui de 2025. (1 pt)
- Calculer le chiffre d'affaires cumulé $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$ sur les dix années 2025 à 2034 (arrondir au millier de dirhams). (0,75 pt)

6. On modélise l'évolution du chiffre d'affaires par la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 500e^{0,0392x}$.
- (a) En utilisant l'égalité $1,04 = e^{\ln 1,04}$, expliquer pourquoi $f(n) \approx u_n$ pour tout entier naturel n . (0,5 pt)
 - (b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$. (0,5 pt)
 - (c) Résoudre l'équation $f(x) = 1\,000$ (arrondir la solution à 10^{-2} près) et comparer avec le résultat de la question 4. (0,5 pt)

Étude d'une fonction exponentielle

Exercice 3 (10 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,75 pt)
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement ce résultat. (1 pt)
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat. (0,75 pt)
4. Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$. (0,75 pt)
5. Dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
6. Calculer $f''(x)$ et montrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées. (1 pt)
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point I . (0,5 pt)
8. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0, +\infty[$. (1 pt)
(b) Montrer que α vérifie $\ln(\alpha+2) = \alpha$. (0,5 pt)
(c) Vérifier que $1,1 < \alpha < 1,2$. (0,5 pt)
9. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ (on prendra $f(-1) \approx 2,7$ et $f(2) \approx 0,5$). (1 pt)
10. Discuter, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. (1,25 pt)