

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2 : fonctions logarithmiques et exponentielles

Calculs avec les fonctions logarithme et exponentielle

Solution 1.

- (a) L'équation est définie si $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$. Pour $x > 1$: $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln 4 \iff \ln((x - 1)(x + 2)) = \ln 4 \iff (x - 1)(x + 2) = 4 \iff x^2 + x - 6 = 0$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante, donc injective). Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, d'où les racines $x = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x = \frac{-1+5}{2} = 2$. Seule la valeur 2 vérifie $x > 1$: $S = \{2\}$.

(b) On pose $X = e^x$, avec $X > 0$. L'équation devient $X^2 - 4X + 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, de racines $X = 1$ et $X = 3$ (toutes deux strictement positives). $e^x = 1 \iff x = 0$ et $e^x = 3 \iff x = \ln 3$. Donc $S = \{0, \ln 3\}$.

(c) L'inéquation est définie si $2x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{2}$. Pour $x > \frac{1}{2}$: $\ln(2x - 1) \leq 0 \iff \ln(2x - 1) \leq \ln 1 \iff 2x - 1 \leq 1 \iff x \leq 1$ (car $\ln$ est strictement croissante). Donc $S =]\frac{1}{2}, 1]$.
- (a) Pour $x > 0$: $\ln x - 2x = x(\frac{\ln x}{x} - 2)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée), donc la parenthèse tend vers -2 et, comme $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2x) = -\infty$.

(b) $(x^2 - 3)e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} - \frac{3}{e^x}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = 0$.

(c) $(x + 2)e^x = xe^x + 2e^x$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)e^x = 0$.
- (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$.

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, avec $(e^u)' = u'e^u$: $g'(x) = 1 \times e^{-2x} + (x + 1) \times (-2e^{-2x}) = (1 - 2x - 2)e^{-2x} = -(2x + 1)e^{-2x}$.
- $\ln(e^3) = 3$, $\ln(\frac{1}{e}) = -\ln e = -1$ et $e^{\ln 4} = 4$. Donc $A = 3 - (-1) + 4 = 8$.

Suite géométrique et modèle exponentiel : chiffre d'affaires d'une entreprise

Solution 2.

- Une hausse de 4% revient à multiplier par $1 + \frac{4}{100} = 1,04$: $u_1 = 500 \times 1,04 = 520$ et $u_2 = 520 \times 1,04 = 540,8$ (en milliers de dirhams).
- Chaque année, le chiffre d'affaires est multiplié par 1,04 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,04u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $u_0 = 500$, d'où $u_n = 500 \times 1,04^n$.

3. L'année 2035 correspond à $n = 10$: $u_{10} = 500 \times 1,04^{10} \approx 500 \times 1,48024 \approx 740,12$. Le chiffre d'affaires prévu pour 2035 est d'environ 740 000 DH.
4. Le double du chiffre d'affaires de 2025 est 1 000 milliers de dirhams. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 1\,000$: $500 \times 1,04^n > 1\,000 \Leftrightarrow 1,04^n > 2 \Leftrightarrow n \ln 1,04 > \ln 2 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln 1,04}$ (on a appliqué la fonction $\ln$, strictement croissante, puis divisé par $\ln 1,04 > 0$). Or $\frac{\ln 2}{\ln 1,04} \approx 0,6931/0,0392 \approx 17,68$, donc $n \geq 18$. Le chiffre d'affaires dépassera le double de celui de 2025 à partir de l'année $2025 + 18 = 2043$.
5. S est la somme des 10 premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,04 : $S = u_0 \times \frac{1,04^{10}-1}{1,04-1} = 500 \times \frac{1,48024-1}{0,04} = 500 \times \frac{0,48024}{0,04} = 500 \times 12,006 = 6\,003$. Le chiffre d'affaires cumulé sur les dix années est d'environ 6 003 000 DH.
6. (a) Comme $1,04 = e^{\ln 1,04}$, on a $1,04^n = (e^{\ln 1,04})^n = e^{n \ln 1,04}$. Avec $\ln 1,04 \approx 0,0392$: $u_n = 500 \times 1,04^n = 500e^{n \ln 1,04} \approx 500e^{0,0392n} = f(n)$.
 (b) $f'(x) = 500 \times 0,0392e^{0,0392x} = 19,6e^{0,0392x}$. Comme $e^{0,0392x} > 0$ pour tout x , $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
 (c) $f(x) = 1\,000 \Leftrightarrow e^{0,0392x} = 2 \Leftrightarrow 0,0392x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{0,0392} \approx 0,6931/0,0392 \approx 17,68$. Dans le modèle continu, le chiffre d'affaires double au bout d'environ 17,68 années, c'est-à-dire au cours de la 18^e année : on retrouve le résultat de la question 4 (le premier chiffre d'affaires annuel supérieur au double est celui de $n = 18$).

Étude d'une fonction exponentielle

Solution 3.

1. Quand $x \rightarrow -\infty$: $x+2 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (car $-x \rightarrow +\infty$). Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
2. Pour tout réel x : $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 Interprétation : l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
3. Pour $x \neq 0$: $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x+2}{x}\right)e^{-x} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $1 + \frac{2}{x} \rightarrow 1$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
 Interprétation : comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, la courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = (1-x-2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$.
5. Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x , $f'(x)$ a le signe de $-(x+1)$: $f'(x) > 0$ pour $x < -1$, $f'(-1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > -1$. $f(-1) = (-1+2)e^1 = e$.
 Tableau de variations : f est strictement croissante sur $] -\infty, -1]$, de $-\infty$ à e , puis strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$, de e à 0 (limite non atteinte). Elle admet un maximum égal à e en $x = -1$.
6. $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$, donc $f''(x) = -[1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x})] = -(1-x-1)e^{-x} = xe^{-x}$. $f''(x)$ a le signe de x : $f''(x) < 0$ sur $] -\infty, 0[$ et $f''(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi $(\mathcal{C})$ est concave sur $] -\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$, et f'' s'annule en changeant de signe en 0 : le point $I(0, f(0)) = I(0, 2)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

7. $f(0) = 2$ et $f'(0) = -(0+1)e^0 = -1$, donc $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit $(T) : y = -x + 2$.
8. (a) Sur $[0, +\infty[$, f est continue (produit de fonctions continues) et strictement décroissante (question 5, car $0 > -1$), avec $f(0) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 < 1$, il existe un réel $b > 0$ tel que $f(b) < 1$; on a alors $f(b) < 1 < f(0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $]0, b[$, et cette solution est unique sur $[0, +\infty[$ car f y est strictement décroissante. Comme $f(0) = 2 \neq 1$, cette solution α appartient à $]0, +\infty[$.
 (b) $f(\alpha) = 1 \Leftrightarrow (\alpha + 2)e^{-\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha + 2 = e^\alpha$ (on a multiplié par $e^\alpha > 0$). Comme $\alpha + 2 > 0$, on peut appliquer $\ln$: $\ln(\alpha + 2) = \ln(e^\alpha) = \alpha$.
 (c) $f(1,1) = 3,1 \times e^{-1,1} \approx 3,1 \times 0,333 \approx 1,032 > 1$ et $f(1,2) = 3,2 \times e^{-1,2} \approx 3,2 \times 0,301 \approx 0,963 < 1$. Ainsi $f(1,2) < f(\alpha) < f(1,1)$ et, f étant strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on obtient $1,1 < \alpha < 1,2$.
9. Tracé : on place le maximum $(-1, e) \approx (-1; 2,7)$ (tangente horizontale), le point d'inflexion $I(0, 2)$ avec sa tangente $(T) : y = -x + 2$, le point $(-2, 0)$ où $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses, le point $(2, f(2)) \approx (2; 0,5)$ et le point d'abscisse $\alpha \approx 1,15$ où $(\mathcal{C})$ coupe la droite $y = 1$. À gauche, la courbe descend vers $-\infty$ (branche parabolique verticale) ; à droite, elle se rapproche de l'axe des abscisses en restant au-dessus.
10. Le nombre de solutions de $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec la droite horizontale d'équation $y = m$. On lit le tableau de variations :
 sur $] -\infty, -1]$, f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à e : l'équation $f(x) = m$ y admet exactement une solution si $m \leq e$, aucune si $m > e$;
 sur $[-1, +\infty[$, f est continue et strictement décroissante de e à 0 (non atteint) : l'équation y admet exactement une solution si $0 < m \leq e$, aucune sinon.
 En regroupant (la solution $x = -1$ pour $m = e$ est commune aux deux intervalles) :
 si $m > e$: aucune solution ;
 si $m = e$: une solution unique, $x = -1$;
 si $0 < m < e$: deux solutions distinctes, l'une dans $] -\infty, -1[$ et l'autre dans $] -1, +\infty[$;
 si $m \leq 0$: une solution unique, située dans $] -\infty, -2]$.