

Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1 : limites et continuité, dérivation, suites numériques

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 5 + 10 points. Les résultats numériques demandés seront arrondis comme indiqué dans l'énoncé.

Limites et continuité

Exercice 1 (5 points).

- Calculer les limites suivantes :
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4}$; (0,5 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$; (0,5 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$; (0,5 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{x + 1}$ (on pourra utiliser le théorème des gendarmes). (0,5 pt)
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = m$, où m est un réel. Déterminer la valeur de m pour laquelle f est continue en 2. (1 pt)
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x - 3$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, 2]$. (1,25 pt)
 - Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,3$. (0,75 pt)

Suites numériques

Exercice 2 (5 points). Un opérateur de téléphonie compte 1 000 abonnés en 2025. Chaque année, il perd 20% de ses abonnés mais en gagne 600 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés de l'année $2025 + n$; ainsi $u_0 = 1\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 600.$$

- Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 3\,000$. (1 pt)
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 0,2(3\,000 - u_n)$, puis en déduire que la suite (u_n) est croissante. (1 pt)
- En déduire que la suite (u_n) est convergente. (0,5 pt)
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3\,000$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (0,75 pt)
- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Interpréter ce résultat. (0,75 pt)

7. On donne $0,8^{13} \approx 0,055$ et $0,8^{14} \approx 0,044$. À partir de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 2 900 ? Justifier. (0,5 pt)

Étude d'une fonction rationnelle et coût moyen

Exercice 3 (10 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

Partie A.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les deux dernières limites. (1,5 pt)
- Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$. (0,5 pt)
- En déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D) . (1 pt)
- Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$. (1 pt)
- Dresser le tableau de variations de f . (1,5 pt)
- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2. (0,75 pt)
- Calculer $f''(x)$ et étudier la concavité de $(\mathcal{C})$. La courbe admet-elle un point d'inflexion ? (0,75 pt)
- Tracer (D) , (T) et $(\mathcal{C})$. (1 pt)

Partie B. Une entreprise fabrique chaque jour une quantité x (en tonnes, avec $x > 1$) d'un produit chimique. Le coût moyen de fabrication d'une tonne, exprimé en milliers de dirhams, est $C_M(x) = f(x)$.

- Pour quelle quantité produite le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ? (1 pt)
- Une tonne de ce produit se vend 7 000 DH. Déterminer l'ensemble des quantités x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice, c'est-à-dire pour lesquelles le coût moyen est strictement inférieur au prix de vente. (1 pt)