

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1 : limites et continuité, dérivation, suites numériques

Limites et continuité

Solution 1.

- (a) En $+\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$.

(b) En $x = 1$, le numérateur et le dénominateur s'annulent (forme indéterminée $\frac{0}{0}$). On factorise : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Pour $x \neq 1$: $\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{x+2}{x+1}$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$.

(c) Forme indéterminée $+\infty - \infty$. On multiplie par l'expression conjuguée : pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$ (on a divisé numérateur et dénominateur par $x = \sqrt{x^2}$). Comme $\frac{4}{x} \rightarrow 0$, le dénominateur tend vers 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x) = 2$.

(d) Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\frac{3x-1}{x+1} \leq \frac{3x+\cos x}{x+1} \leq \frac{3x+1}{x+1}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+1} = 3$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+\cos x}{x+1} = 3$.
- Pour $x \neq 2$: $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. La fonction f est continue en 2 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, c'est-à-dire $m = 4$.
- (a) g est une fonction polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x : g est strictement croissante sur $[1, 2]$. De plus $g(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ et $g(2) = 8 + 2 - 3 = 7 > 0$, donc $g(1) \times g(2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (g continue sur $[1, 2]$ et 0 compris entre $g(1)$ et $g(2)$), l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]1, 2[$; comme g est strictement croissante, cette solution α est unique.

(b) $g(1,2) = 1,728 + 1,2 - 3 = -0,072 < 0$ et $g(1,3) = 2,197 + 1,3 - 3 = 0,497 > 0$. Le même raisonnement sur $[1,2, 1,3]$ montre que $\alpha \in]1,2, 1,3[$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$.

Suites numériques

Solution 2.

- $u_1 = 0,8 \times 1\,000 + 600 = 1\,400$ et $u_2 = 0,8 \times 1\,400 + 600 = 1\,120 + 600 = 1\,720$.
- Initialisation** : $u_0 = 1\,000 < 3\,000$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $u_n < 3\,000$ pour un certain entier n . Alors $u_{n+1} = 0,8u_n + 600 < 0,8 \times 3\,000 + 600 = 2\,400 + 600 = 3\,000$ (on a multiplié par $0,8 > 0$ puis ajouté 600). La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3\,000$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 0,8u_n + 600 - u_n = 600 - 0,2u_n = 0,2(3\,000 - u_n)$. D'après la question 2, $3\,000 - u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 000 ; d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,000 = 0,8u_n + 600 - 3\,000 = 0,8u_n - 2\,400 = 0,8(u_n - 3\,000) = 0,8v_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3\,000 = -2\,000$.
6. $v_n = v_0 \times q^n = -2\,000 \times 0,8^n$, d'où $u_n = v_n + 3\,000 = 3\,000 - 2\,000 \times 0,8^n$. Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3\,000$. Interprétation : à long terme, le nombre d'abonnés de l'opérateur se stabilise autour de 3 000 (sans jamais l'atteindre).
7. $u_{13} = 3\,000 - 2\,000 \times 0,8^{13} \approx 3\,000 - 2\,000 \times 0,055 = 2\,890 < 2\,900$ et $u_{14} \approx 3\,000 - 2\,000 \times 0,044 = 2\,912 > 2\,900$. Comme la suite (u_n) est croissante, $u_n > 2\,900$ pour tout $n \geq 14$ et $u_n \leq u_{13} < 2\,900$ pour $n \leq 13$. Le nombre d'abonnés dépassera 2 900 à partir de l'année $2025 + 14 = 2039$.

Étude d'une fonction rationnelle et coût moyen

Solution 3.

Partie A.

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
En $\pm\infty$, $f(x)$ a la même limite que $\frac{x^2}{x} = x$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
En 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0^+$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.
Interprétation : la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
2. Pour tout $x \neq 1$: $x + 1 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+4}{x-1} = \frac{x^2-1+4}{x-1} = \frac{x^2+3}{x-1} = f(x)$.
3. $f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$, donc la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
Position relative : $f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x-1}$ a le signe de $x - 1$. Sur $]1, +\infty[$, $f(x) - (x + 1) > 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D) ; sur $] -\infty, 1[$, $f(x) - (x + 1) < 0$: $(\mathcal{C})$ est en dessous de (D) .
4. f est dérivable sur D_f comme fonction rationnelle. En utilisant l'écriture de la question 2 : $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.
5. Le dénominateur $(x - 1)^2$ est strictement positif sur D_f , donc $f'(x)$ a le signe de $(x + 1)(x - 3)$: positif sur $] -\infty, -1]$ et sur $[3, +\infty[$, négatif sur $[-1, 1[$ et sur $]1, 3]$. On calcule $f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \frac{12}{2} = 6$.
Tableau de variations : f est croissante sur $] -\infty, -1]$ (de $-\infty$ à -2), décroissante sur $[-1, 1[$ (de -2 à $-\infty$), décroissante sur $]1, 3]$ (de $+\infty$ à 6) et croissante sur $[3, +\infty[$ (de 6 à $+\infty$).
 f admet un maximum local -2 en $x = -1$ et un minimum local 6 en $x = 3$.
6. $f(2) = \frac{7}{1} = 7$ et $f'(2) = \frac{(2-3)(2+1)}{(2-1)^2} = -3$. $(T) : y = f'(2)(x - 2) + f(2) = -3(x - 2) + 7$, soit $(T) : y = -3x + 13$.
7. $f'(x) = 1 - 4(x - 1)^{-2}$, donc $f''(x) = 8(x - 1)^{-3} = \frac{8}{(x-1)^3}$. $f''(x)$ a le signe de $x - 1$: $f''(x) < 0$ sur $] -\infty, 1[$ et $f''(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$. La courbe $(\mathcal{C})$ est donc concave sur $] -\infty, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$. Elle n'admet pas de point d'inflexion : f'' change de signe en 1, mais $1 \notin D_f$ (il n'y a pas de point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1).
8. Tracé : on place l'asymptote verticale $x = 1$, l'asymptote oblique $(D) : y = x + 1$, la tangente $(T) : y = -3x + 13$, les points $(-1, -2)$ (maximum local, tangente horizontale), $(3, 6)$ (minimum local, tangente horizontale), $(2, 7)$, ainsi que $(-3, -3)$, $(0, -3)$, $(4, \frac{19}{3})$ et $(5, 7)$.

La branche de gauche est en dessous de (D) et concave ; la branche de droite est au-dessus de (D) et convexe.

Partie B.

1. Sur $]1, +\infty[$, d'après le tableau de variations, f admet un minimum en $x = 3$, égal à $f(3) = 6$. Le coût moyen est donc minimal pour une production de 3 tonnes par jour ; il vaut alors 6 milliers de dirhams, soit 6 000 DH par tonne.
2. Le prix de vente d'une tonne est 7 milliers de dirhams. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $f(x) < 7$ avec $x > 1$. Comme $x - 1 > 0$: $f(x) < 7 \iff x^2 + 3 < 7(x - 1) \iff x^2 - 7x + 10 < 0 \iff (x - 2)(x - 5) < 0$ (le trinôme $x^2 - 7x + 10$ a pour discriminant $49 - 40 = 9$ et pour racines 2 et 5). Un trinôme est du signe contraire de son coefficient dominant entre ses racines, donc $f(x) < 7 \iff 2 < x < 5$.
L'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle produit entre 2 et 5 tonnes par jour (bornes exclues) : $x \in]2, 5[$.