

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 4

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 6 + 8 points.

Dérivation

Exercice 1 (6 points).

1. Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.
 - (a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
 - (b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. (1 pt)
 - (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
 - (d) $f(x) = (3x - 2)^4$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x$. En utilisant la définition du nombre dérivé (limite du taux d'accroissement), montrer que g est dérivable en 1 et calculer $g'(1)$. (1 pt)
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 2. (1 pt)
4. Le coût total de production de x articles ($0 \leq x \leq 100$) est donné, en dirhams, par $C(x) = 2x^2 + 30x + 500$. On appelle **coût marginal** la fonction dérivée C' . Calculer $C'(x)$, puis le coût marginal pour une production de 10 articles. (1 pt)

Optimisation d'un bénéfice

Exercice 2 (6 points). Une entreprise fabrique et vend chaque jour x articles, avec $0 \leq x \leq 60$. Le bénéfice journalier, en dirhams, est donné par $B(x) = -2x^2 + 120x - 1000$.

1. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe sur $[0, 60]$. (1,5 pt)
2. Dresser le tableau de variations de B sur $[0, 60]$. (1 pt)
3. En déduire le nombre d'articles à fabriquer chaque jour pour que le bénéfice soit maximal, et la valeur de ce bénéfice maximal. (1 pt)
4. Résoudre dans $[0, 60]$ l'inéquation $B(x) \geq 0$ et interpréter le résultat. (1,5 pt)
5. Le prix de vente d'un article est de 40 DH en 2026 et augmente de 3% chaque année. Au bout de combien d'années ce prix dépassera-t-il 80 DH ? On donne $\log 2 \approx 0,301$ et $\log 1,03 \approx 0,0128$. (1 pt)

Étude d'une fonction

Exercice 3 (8 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,5 pt)
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats. (1 pt)
3. (a) Montrer que pour tout $x \in D_f : f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$. (0,5 pt)
(b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$. (1 pt)
4. Étudier la position relative de (C_f) et de (D) . (0,5 pt)
5. (a) Montrer que pour tout $x \in D_f : f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$. (1 pt)
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f . (1,5 pt)
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2. (0,5 pt)
7. Tracer la droite (D) , l'asymptote verticale et la courbe (C_f) . (1 pt)