

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 4

Dérivation

Solution 1.

- (a) f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$.
 (b) $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x - 3$, $v'(x) = 1$. Pour tout $x \neq 3$: $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = -\frac{7}{(x-3)^2}$.
 (c) $f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 3 > 0$ et $u'(x) = 2x$. Pour tout réel x : $f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
 (d) $f = u^4$ avec $u(x) = 3x - 2$ et $u'(x) = 3$. Pour tout réel x : $f'(x) = 4u^3u' = 4 \times 3(3x - 2)^3 = 12(3x - 2)^3$.
- $g(1) = 2$. Pour $x \neq 1$, le taux d'accroissement de g entre 1 et x est $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2$. Or $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$: cette limite existe et est finie, donc g est dérivable en 1 et $g'(1) = 3$.
- $h(2) = 4 - 6 + 1 = -1$ et $h'(x) = 2x - 3$, donc $h'(2) = 1$. La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = h'(2)(x - 2) + h(2) = 1 \times (x - 2) - 1$, soit $y = x - 3$.
- $C'(x) = 4x + 30$. Pour $x = 10$: $C'(10) = 40 + 30 = 70$. Le coût marginal pour une production de 10 articles est de 70 DH (c'est, approximativement, le coût de fabrication du 11^e article).

Optimisation d'un bénéfice

Solution 2.

- B est un polynôme, dérivable sur $[0, 60]$, et $B'(x) = -4x + 120 = 4(30 - x)$. $B'(x) > 0 \iff 30 - x > 0 \iff x < 30$. Donc $B'(x) > 0$ sur $[0, 30[$, $B'(30) = 0$ et $B'(x) < 0$ sur $]30, 60]$.
- $B(0) = -1000$, $B(30) = -2 \times 900 + 3600 - 1000 = -1800 + 3600 - 1000 = 800$ et $B(60) = -2 \times 3600 + 7200 - 1000 = -1000$. Tableau de variations : d'après le signe de B' , B est strictement croissante sur $[0, 30]$, de $B(0) = -1000$ jusqu'à $B(30) = 800$, puis strictement décroissante sur $[30, 60]$, de 800 jusqu'à $B(60) = -1000$.
- B' s'annule en 30 en changeant de signe (de $+$ à $-$) : B admet un maximum en $x = 30$. Le bénéfice est maximal pour 30 articles par jour et vaut $B(30) = 800$ DH.
- $B(x) \geq 0 \iff -2x^2 + 120x - 1000 \geq 0 \iff x^2 - 60x + 500 \leq 0$ (on divise par $-2 < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité). Le trinôme $x^2 - 60x + 500$ a pour discriminant $\Delta = 3600 - 2000 = 1600 = 40^2$, donc pour racines $x_1 = \frac{60-40}{2} = 10$ et $x_2 = \frac{60+40}{2} = 50$. Comme $a = 1 > 0$, il est négatif ou nul entre ses racines : $S = [10, 50]$ (inclus dans $[0, 60]$). Interprétation :

l'entreprise réalise un bénéfice (positif ou nul) si elle fabrique entre 10 et 50 articles par jour ; en dessous de 10 ou au-dessus de 50 articles, elle est en perte.

5. Le prix après n années est $p_n = 40 \times 1,03^n$ (suite géométrique de raison 1,03). On cherche le plus petit entier n tel que $40 \times 1,03^n > 80$, c'est-à-dire $1,03^n > 2$. Comme $\log$ est strictement croissante et $\log 1,03 > 0$: $1,03^n > 2 \Leftrightarrow n \log 1,03 > \log 2 \Leftrightarrow n > \frac{\log 2}{\log 1,03} \approx 0, \frac{301}{0,0128} \approx 23,5$. Donc le prix dépassera 80 DH au bout de 24 années (en 2050).

Étude d'une fonction

Solution 3.

- $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
 - (a) Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$: $f(x) = \frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = x \times \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
(b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4 > 0$. Quand $x \rightarrow 1^-$, $x - 1 \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; quand $x \rightarrow 1^+$, $x - 1 \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Interprétation : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_f) .
 - (a) Pour tout $x \neq 1$: $x + 1 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+4}{x-1} = \frac{x^2-1+4}{x-1} = \frac{x^2+3}{x-1} = f(x)$.
(b) Pour tout $x \neq 1$, $f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-1} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$: la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Le signe de $f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x-1}$ est celui de $x - 1$. Sur $]1, +\infty[$, $f(x) - (x + 1) > 0$: (C_f) est au-dessus de (D) . Sur $] -\infty, 1[$, $f(x) - (x + 1) < 0$: (C_f) est en dessous de (D) . La courbe ne coupe jamais son asymptote.
 - (a) D'après la question 3 (a), $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$, et $(\frac{1}{x-1})' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. Donc pour tout $x \neq 1$: $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.
(b) Le dénominateur $(x - 1)^2$ est strictement positif sur D_f , donc $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x + 1)(x - 3)$, de racines -1 et 3 : positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.
 - Sur $] -\infty, -1[$: $f'(x) > 0$, f est strictement croissante.
 - Sur $] -1, 1[$ et sur $]1, 3[$: $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante.
 - Sur $]3, +\infty[$: $f'(x) > 0$, f est strictement croissante.
- Valeurs : $f(-1) = \frac{1+3}{-2} = -2$ et $f(3) = \frac{9+3}{2} = 6$. Tableau de variations : f croît de $-\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $f(-1) = -2$ (maximum local), décroît de -2 jusqu'à $-\infty$ (en 1^-) ; puis, à droite de 1, décroît de $+\infty$ (en 1^+) jusqu'à $f(3) = 6$ (minimum local), et croît de 6 jusqu'à $+\infty$ (en $+\infty$).
- $f(2) = \frac{4+3}{1} = 7$ et $f'(2) = \frac{(2+1)(2-3)}{(2-1)^2} = -3$. Donc $(T) : y = -3(x - 2) + 7$, soit $y = -3x + 13$.
 - Tracé : on trace l'asymptote verticale $x = 1$ et la droite $(D) : y = x + 1$ (elle passe par $(0; 1)$ et $(-1; 0)$). On place les points de (C_f) : $(-3; -3)$, $(-1; -2)$ (tangente horizontale, maximum local), $(0; -3)$, $(2; 7)$, $(3; 6)$ (tangente horizontale, minimum local), $(5; 7)$. La branche de gauche est en dessous de (D) et s'en rapproche en $-\infty$, monte jusqu'au point $(-1; -2)$ puis descend vers $-\infty$ le long de l'asymptote $x = 1$. La branche de droite descend de $+\infty$ (le long de $x = 1$) jusqu'au point $(3; 6)$, puis remonte en restant au-dessus de (D) et en s'en rapprochant en $+\infty$.