

Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 3

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 7 + 7 points. On donne $\log 2 \approx 0,301$, $\log 3 \approx 0,477$ et $\log 1,02 \approx 0,0086$.

Dénombrement

Exercice 1 (6 points). Le service commercial d'une entreprise compte 12 employés : 7 femmes et 5 hommes.

1. Combien de comités de 3 personnes peut-on former ? (1 pt)
2. Combien de comités de 3 personnes comportant exactement 2 femmes peut-on former ? (1 pt)
3. Combien de comités de 3 personnes comportant au moins un homme peut-on former ? (1 pt)
4. On veut désigner parmi les 12 employés un directeur, un adjoint et un trésorier, ces trois postes étant occupés par trois personnes différentes. Combien y a-t-il de façons de le faire ? (1 pt)
5. Le coffre du service est protégé par un code de 4 chiffres (de 0 à 9).
 - (a) Combien de codes différents existe-t-il ? (0,5 pt)
 - (b) Combien de codes formés de 4 chiffres deux à deux distincts existe-t-il ? (0,5 pt)
6. Développer $(2x - 1)^4$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. (1 pt)

Logarithme décimal

Exercice 2 (7 points). On pose $a = \log 2$ et $b = \log 3$.

1. Exprimer en fonction de a et b les nombres $\log 12$, $\log 1,5$ et $\log 0,2$. (1,5 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x + 3) + \log x = 1$. (1,5 pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log(3x - 1) \leq \log(x + 5)$. (1,5 pt)
4. Déterminer le nombre de chiffres de l'entier 6^{50} . (1 pt)
5. La population d'une ville est de 200 000 habitants en 2025 et augmente de 2% par an. On note P_n la population n années après 2025.
 - (a) Exprimer P_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - (b) À partir de quelle année la population dépassera-t-elle 300 000 habitants ? (1 pt)

Limites

Exercice 3 (7 points).

1. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4}$. (1 pt)

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - 5)$. (0,5 pt)

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$. (1 pt)

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$. (1,5 pt)

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

(a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,5 pt)

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats. (1 pt)

(c) Vérifier que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = x - 1 + \frac{3}{x - 2}$. (0,5 pt)

(d) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$. (1 pt)