

Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 3

Dénombrement

Solution 1.

1. Un comité est un sous-ensemble de 3 personnes parmi 12 (l'ordre n'a pas d'importance) : il y a $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$ comités possibles.
2. On choisit 2 femmes parmi 7 puis 1 homme parmi 5 ; d'après le principe multiplicatif : $\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} = 21 \times 5 = 105$ comités.
3. Le contraire de « au moins un homme » est « aucun homme », c'est-à-dire « trois femmes » : il y a $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$ comités formés de trois femmes. Donc le nombre de comités comportant au moins un homme est $220 - 35 = 185$.
4. Les trois postes sont différents, donc l'ordre compte : il s'agit d'un arrangement de 3 personnes parmi 12 : $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$ façons.
5. (a) Chaque chiffre peut prendre 10 valeurs et les chiffres peuvent se répéter ; d'après le principe multiplicatif, il y a $10^4 = 10\,000$ codes.
(b) Les 4 chiffres sont distincts et ordonnés : il s'agit d'un arrangement de 4 chiffres parmi 10 : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes.
6. D'après la formule du binôme de Newton, avec $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$, $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{2} = 6$: $(2x - 1)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(-1) + 6(2x)^2(-1)^2 + 4(2x)(-1)^3 + (-1)^4$, soit $(2x - 1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$.

Logarithme décimal

Solution 2.

1. $\log 12 = \log(4 \times 3) = \log 2^2 + \log 3 = 2a + b$. $\log 1,5 = \log(\frac{3}{2}) = \log 3 - \log 2 = b - a$.
 $\log 0,2 = \log(\frac{2}{10}) = \log 2 - \log 10 = a - 1$.
2. Ensemble de définition : il faut $x + 3 > 0$ et $x > 0$, soit $x > 0$. Pour $x > 0$, l'équation s'écrit $\log(x(x + 3)) = \log 10$, et comme la fonction $\log$ est strictement croissante, elle équivaut à $x(x + 3) = 10$, soit $x^2 + 3x - 10 = 0$. $\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$, d'où $x = \frac{-3-7}{2} = -5$ ou $x = \frac{-3+7}{2} = 2$. Seule la valeur 2 appartient à l'ensemble de définition. Donc $S = \{2\}$.
3. Ensemble de définition : il faut $3x - 1 > 0$ et $x + 5 > 0$, soit $x > \frac{1}{3}$ (alors $x + 5 > 0$ est automatique). Pour $x > \frac{1}{3}$, comme $\log$ est strictement croissante, l'inéquation équivaut à $3x - 1 \leq x + 5$, soit $2x \leq 6$, c'est-à-dire $x \leq 3$. Avec l'ensemble de définition : $S =]\frac{1}{3}, 3]$.
4. $\log(6^{50}) = 50 \log 6 = 50(\log 2 + \log 3) = 50(a + b) \approx 50 \times 0,778 = 38,9$. Donc $38 \leq \log(6^{50}) < 39$, c'est-à-dire $10^{38} \leq 6^{50} < 10^{39}$: l'entier 6^{50} a 39 chiffres.

5. (a) Chaque année, la population est multipliée par $1 + \frac{2}{100} = 1,02$. La suite (P_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $P_0 = 200\,000$, donc $P_n = 200\,000 \times 1,02^n$.
- (b) On cherche le plus petit entier n tel que $P_n > 300\,000$, c'est-à-dire $1,02^n > \frac{3}{2} = 1,5$. Les deux membres sont strictement positifs et log est strictement croissante, donc cette inéquation équivaut à $n \log 1,02 > \log 1,5$. Comme $\log 1,02 > 0$: $n > \frac{\log 1,5}{\log 1,02} = \frac{b-a}{\log 1,02} \approx 0, \frac{176}{0,0086} \approx 20,5$. Le plus petit entier qui convient est $n = 21$: la population dépassera 300 000 habitants à partir de l'année $2025 + 21 = 2046$.

Limites

Solution 3.

1. (a) C'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par le terme dominant au numérateur et au dénominateur : $\frac{2x^2-3x+1}{x^2+4} = \frac{x^2(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+4} = \frac{2}{1} = 2$.
- (b) $-3x^3 + x^2 - 5 = x^3(-3 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3})$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^3}) = -3$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - 5) = +\infty$.
- (c) En $x = 2$, le numérateur et le dénominateur s'annulent : forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ a pour racines 2 et 3 ($\Delta = 25 - 24 = 1$), donc $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ et, pour $x \neq 2$: $\frac{x^2-5x+6}{x-2} = x - 3$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$: forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{(\sqrt{x^2+4x}+x)} = \frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+4x} = \sqrt{x^2(1+\frac{4}{x})} = x\sqrt{1+\frac{4}{x}}$, donc $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{4x}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1)} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x) = \frac{4}{1+1} = 2$.
2. (a) $f(x)$ existe si et seulement si $x - 2 \neq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = 4 - 6 + 5 = 3 > 0$. Quand $x \rightarrow 2^-$, $x - 2 \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$. Quand $x \rightarrow 2^+$, $x - 2 \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. Interprétation : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe (C_f) .
- (c) Pour tout $x \neq 2$: $x - 1 + \frac{3}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)+3}{x-2} = \frac{x^2-3x+2+3}{x-2} = \frac{x^2-3x+5}{x-2} = f(x)$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Asymptote oblique : pour tout $x \neq 2$, $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{x-2}$, et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-2} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$: la droite $(D) : y = x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.