

Devoir surveillé n°2 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 2

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 7 + 7 points.

Suites numériques

Exercice 1 (6 points).

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 7$ et $u_5 = 16$.
 - (a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0 . (1 pt)
 - (b) Exprimer u_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - (c) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$. (1 pt)
2. Soit (v_n) une suite géométrique à termes strictement positifs telle que $v_0 = 4$ et $v_3 = 32$.
 - (a) Déterminer la raison q et exprimer v_n en fonction de n . (1 pt)
 - (b) Calculer la somme $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$. (1 pt)
3. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$, et (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = f(n)$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$: $f(x) = 3 - \frac{1}{x+1}$, et en déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. (1 pt)
 - (b) En déduire que la suite (w_n) est croissante et majorée par 3. (0,5 pt)

Suites financières

Exercice 2 (7 points). Le 1^{er} janvier 2026, une entreprise place un capital de 50 000 DH à intérêts composés au taux annuel de 5%. On note C_n le capital acquis après n années ; ainsi $C_0 = 50\,000$.

1. Calculer C_1 et C_2 . (1 pt)
2. Justifier que (C_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison, puis exprimer C_n en fonction de n . (1 pt)
3. Calculer le capital acquis après 4 années (arrondir au centime). (1 pt)
4. On place le même capital de 50 000 DH à intérêts simples au taux annuel de 5%. On note D_n le capital acquis après n années. Préciser la nature de la suite (D_n) , exprimer D_n en fonction de n , puis calculer D_4 et comparer avec le résultat de la question 3. (1,5 pt)
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $C_n > 70\,000$. Justifier la réponse. (1 pt)
6. Par ailleurs, à la fin de chaque année, à partir de la fin de l'année 2026, l'entreprise verse 10 000 DH sur un compte d'épargne rémunéré à 5% par an à intérêts composés. On note V_n la valeur

acquise par l'ensemble des versements juste après le n^e versement.

- (a) Justifier que $V_n = 10\,000(1 + 1,05 + 1,05^2 + \dots + 1,05^{n-1})$, puis en déduire que $V_n = 200\,000(1,05^n - 1)$. (1 pt)
- (b) Calculer V_4 (arrondir au centime). (0,5 pt)

Barycentre

Exercice 3 (7 points). Soit ABC un triangle.

1. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et construire le point G . (1 pt)
2. Soit I le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 3)$. Montrer, en utilisant l'associativité du barycentre, que I est le milieu du segment $[GC]$. Construire le point I . (1,5 pt)
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. (1 pt)
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $A(1; 2)$, $B(7; 2)$ et $C(1; 8)$. Calculer les coordonnées des points G et I . (1 pt)
5. Montrer que pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MI}$. (1 pt)
6. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 12$. (1 pt)
7. Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que le vecteur $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. (0,5 pt)