

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2

Suites numériques

Solution 1.

- (a) Pour une suite arithmétique, $u_n = u_p + (n - p)r$. Donc $u_5 = u_2 + 3r$, soit $16 = 7 + 3r$, d'où $r = 3$. Puis $u_0 = u_2 - 2r = 7 - 6 = 1$.

(b) $u_n = u_0 + nr = 1 + 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) S est la somme de 11 termes consécutifs d'une suite arithmétique : $S = 11 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2}$. Or $u_{10} = 1 + 30 = 31$, donc $S = 11 \times \frac{1+31}{2} = 11 \times 16 = 176$.
- (a) Pour une suite géométrique, $v_3 = v_0 q^3$, soit $32 = 4q^3$, d'où $q^3 = 8$ et, comme $q > 0$ (termes strictement positifs), $q = 2$. Donc $v_n = v_0 q^n = 4 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) S' est la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 2 \neq 1$: $S' = v_0 \frac{1-q^8}{1-q} = 4 \times \frac{1-256}{1-2} = 4 \times 255 = 1020$.
- (a) Pour tout $x \geq 0$: $3 - \frac{1}{x+1} = \frac{3(x+1)-1}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1} = f(x)$. Soient $0 \leq x_1 < x_2$. Alors $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$, donc $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$), puis $-\frac{1}{x_1+1} < -\frac{1}{x_2+1}$ et enfin $f(x_1) < f(x_2)$. Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < n+1$ et f est croissante sur $[0, +\infty[$, donc $f(n) \leq f(n+1)$, c'est-à-dire $w_n \leq w_{n+1}$: la suite (w_n) est croissante. De plus $\frac{1}{n+1} > 0$, donc $w_n = 3 - \frac{1}{n+1} < 3$: la suite (w_n) est majorée par 3.

Suites financières

Solution 2.

- Chaque année, l'intérêt est calculé sur le capital de l'année précédente. $C_1 = 50\,000 + 50\,000 \times 0,05 = 50\,000 \times 1,05 = 52\,500$ DH. $C_2 = 52\,500 \times 1,05 = 55\,125$ DH.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_{n+1} = C_n + 0,05C_n = 1,05C_n$. Donc (C_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $C_0 = 50\,000$, d'où $C_n = 50\,000 \times 1,05^n$.
- $1,05^4 = 1,21550625$, donc $C_4 = 50\,000 \times 1,21550625 = 60\,775,3125 \approx 60\,775,31$ DH.
- À intérêts simples, l'intérêt annuel est toujours calculé sur le capital initial : $50\,000 \times 0,05 = 2\,500$ DH par an. Donc $D_{n+1} = D_n + 2\,500$: (D_n) est une suite arithmétique de raison 2 500 et de premier terme 50 000, d'où $D_n = 50\,000 + 2\,500n$. $D_4 = 50\,000 + 10\,000 = 60\,000$ DH. Comparaison : $C_4 - D_4 \approx 775,31$ DH. Sur 4 ans, le placement à intérêts composés rapporte environ 775,31 DH de plus que le placement à intérêts simples.
- La suite (C_n) est strictement croissante (raison $1,05 > 1$ et premier terme positif). À la calculatrice : $C_6 = 50\,000 \times 1,05^6 \approx 67\,004,78 < 70\,000$ et $C_7 = 50\,000 \times 1,05^7 \approx 70\,355,02 >$

70 000. Donc le plus petit entier cherché est $n = 7$: le capital dépasse 70 000 DH après 7 années de placement.

6. (a) Juste après le n^{e} versement, le dernier versement n'a pas encore produit d'intérêt et vaut 10 000 ; l'avant-dernier a été placé une année et vaut $10\,000 \times 1,05$; et ainsi de suite jusqu'au premier versement, placé $n - 1$ années, qui vaut $10\,000 \times 1,05^{n-1}$. En additionnant : $V_n = 10\,000(1 + 1,05 + 1,05^2 + \dots + 1,05^{n-1})$. La parenthèse est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,05 : $1 + 1,05 + \dots + 1,05^{n-1} = \frac{1-1,05^n}{1-1,05} = \frac{1,05^n-1}{0,05}$. Donc $V_n = 10\,000 \times \frac{1,05^n-1}{0,05} = 200\,000(1,05^n - 1)$.
- (b) $V_4 = 200\,000 \times (1,21550625 - 1) = 200\,000 \times 0,21550625 = 43\,101,25$ DH.

Barycentre

Solution 3.

- Par définition du barycentre, $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$, donc $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, soit $3\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Construction : G est le point du segment $[AB]$ situé au tiers de $[AB]$ à partir de A .
- Comme $2 + 1 = 3 \neq 0$, le théorème d'associativité permet de remplacer les points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$ par leur barycentre G affecté du poids $2 + 1 = 3$: I est le barycentre de $(G, 3)$ et $(C, 3)$. Donc $3\overrightarrow{IG} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$: I est le milieu de $[GC]$. Construction : on trace le segment $[GC]$ et on place son milieu I .
- D'après la propriété de caractérisation du barycentre, pour tout point M : $\overrightarrow{MI} = \frac{2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}}{2+1+3}$. Avec $M = A$: $\overrightarrow{AI} = \frac{2\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{6} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- Coordonnées de G : $x_G = \frac{2x_A + x_B}{3} = \frac{2+7}{3} = 3$ et $y_G = \frac{2y_A + y_B}{3} = \frac{4+2}{3} = 2$: $G(3; 2)$. Coordonnées de I : $x_I = \frac{2x_A + x_B + 3x_C}{6} = \frac{2+7+3}{6} = 2$ et $y_I = \frac{2y_A + y_B + 3y_C}{6} = \frac{4+2+24}{6} = 5$: $I(2; 5)$. Vérification : le milieu de $[GC]$ a pour coordonnées $(\frac{3+1}{2}; \frac{2+8}{2}) = (2; 5)$, ce qui confirme la question 2.
- Soit M un point du plan. D'après la relation de Chasles : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 6\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) = 6\overrightarrow{MI}$, car $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ par définition du barycentre I .
- D'après la question 5 : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|6\overrightarrow{MI}\| = 12 \Leftrightarrow 6MI = 12 \Leftrightarrow MI = 2$. Donc (E) est le cercle de centre I et de rayon 2. On le construit au compas, centre I et rayon 2 (dans le repère de la question 4, il passe par exemple par le point $(4; 5)$).
- D'après la question 5, le vecteur $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{MI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire si et seulement si M appartient à la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Donc (F) est la droite passant par I et parallèle à (AB) (dans le repère de la question 4, c'est la droite d'équation $y = 5$).