

Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 7 + 7 points.

Notions de logique

Exercice 1 (6 points).

1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant, puis écrire sa négation.
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 > 0$. (1 pt)
 - (b) $\exists n \in \mathbb{N}, 2n + 1 = 10$. (1 pt)
 - (c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 0$. (1 pt)
2. Soient P et Q deux propositions. Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$. (1,5 pt)
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par contraposée : « si $3n + 2$ est impair, alors n est impair ». (1,5 pt)

Équations, inéquations et programmation linéaire

Exercice 2 (7 points).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$. (1 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} \leq 0$. (1,5 pt)
3. Un commerçant a vendu 40 articles de deux types : des articles de type A à 20 DH l'unité et des articles de type B à 30 DH l'unité, pour une recette totale de 940 DH. On note x le nombre d'articles de type A et y le nombre d'articles de type B vendus. Écrire un système de deux équations vérifié par x et y , puis le résoudre. (1,5 pt)
4. Un atelier de menuiserie fabrique chaque semaine x tables et y armoires. Une table demande 2 heures de machine et 1 heure de main d'œuvre ; une armoire demande 1 heure de machine et 2 heures de main d'œuvre. L'atelier dispose au plus de 80 heures de machine et de 70 heures de main d'œuvre par semaine. Le bénéfice est de 300 DH par table et de 400 DH par armoire.
 - (a) Écrire les contraintes vérifiées par x et y et exprimer le bénéfice hebdomadaire Z en fonction de x et y . (1 pt)
 - (b) Représenter graphiquement, dans un repère orthonormé, l'ensemble des solutions admissibles. (1 pt)
 - (c) Déterminer les sommets du polygone des solutions admissibles, puis le programme de fabrication qui rend le bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ? (1 pt)

Généralités sur les fonctions

Exercice 3 (7 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,5 pt)
2. Montrer que pour tout $x \in D_f : f(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$. (0,5 pt)
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. (1,5 pt)
4. En déduire que pour tout $x \in [2, 4] : 2 \leq f(x) \leq 4$. (1 pt)
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Étudier la parité de g . Que peut-on en déduire pour sa courbe ? (1 pt)
6. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x-1}$. Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ h$, puis calculer $(f \circ h)(5)$. (1 pt)
7. Soit (C) la courbe de la fonction $u : x \mapsto \frac{3}{x}$. Par quelle transformation géométrique obtient-on (C_f) à partir de (C) ? Justifier. (1,5 pt)