

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1

Notions de logique

Solution 1.

- Vraie.** Pour tout réel x , $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$ et $(x + 2)^2 \geq 0$, donc $x^2 + 4x + 5 \geq 1 > 0$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 \leq 0$.
 - Fausse.** Pour tout entier naturel n , le nombre $2n + 1$ est impair alors que 10 est pair : aucun entier n ne convient (on peut aussi remarquer que $2n + 1 = 10$ donne $n = \frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$). Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, 2n + 1 \neq 10$.
 - Fausse.** Soit x un réel quelconque. Le réel $y = 1 - x$ vérifie $x + y = 1 \neq 0$: aucun réel x ne vérifie $x + y = 0$ pour tous les réels y . Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$.
- On examine les quatre cas possibles pour les valeurs de vérité de P et Q , en calculant $\neg P$, puis $(\neg P) \vee Q$, et $P \Rightarrow Q$:
 - P vraie, Q vraie : $\neg P$ est fausse, $(\neg P) \vee Q$ est vraie ; $P \Rightarrow Q$ est vraie.
 - P vraie, Q fausse : $\neg P$ est fausse, $(\neg P) \vee Q$ est fausse ; $P \Rightarrow Q$ est fausse (c'est le seul cas où une implication est fausse).
 - P fausse, Q vraie : $\neg P$ est vraie, $(\neg P) \vee Q$ est vraie ; $P \Rightarrow Q$ est vraie.
 - P fausse, Q fausse : $\neg P$ est vraie, $(\neg P) \vee Q$ est vraie ; $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Dans les quatre cas, $P \Rightarrow Q$ et $(\neg P) \vee Q$ ont la même valeur de vérité : les deux propositions sont équivalentes, ce qui démontre $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$.
- La contraposée de « si $3n + 2$ est impair, alors n est impair » est : « si n est pair, alors $3n + 2$ est pair ». Démontrons-la. Supposons n pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, avec $3k + 1 \in \mathbb{N}$: $3n + 2$ est pair. La contraposée est vraie, donc l'implication de départ est vraie : si $3n + 2$ est impair, alors n est impair.

Équations, inéquations et programmation linéaire

Solution 2.

- $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 = 3^2 > 0$. L'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$. Donc $S = \{2, 5\}$.
- Le quotient est défini pour $x \neq 3$. D'après la question 1, le trinôme $x^2 - 7x + 10$ a pour racines 2 et 5 ; comme $a = 1 > 0$, il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. Le dénominateur $x - 3$ est négatif pour $x < 3$ et positif pour $x > 3$. Tableau de signes du quotient :
 - sur $] -\infty, 2[$: numérateur +, dénominateur -, quotient - ;
 - en $x = 2$: le quotient s'annule ;

- sur $]2, 3[$: numérateur $-$, dénominateur $-$, quotient $+$;
- en $x = 3$: le quotient n'est pas défini (double barre) ;
- sur $]3, 5[$: numérateur $-$, dénominateur $+$, quotient $-$;
- en $x = 5$: le quotient s'annule ;
- sur $]5, +\infty[$: numérateur $+$, dénominateur $+$, quotient $+$.

Le quotient est négatif ou nul sur $] - \infty, 2]$ et sur $]3, 5]$. Donc $S =] - \infty, 2] \cup]3, 5]$.

- Le nombre d'articles donne $x + y = 40$ et la recette donne $20x + 30y = 940$. On résout par substitution : $y = 40 - x$, puis $20x + 30(40 - x) = 940$, soit $1200 - 10x = 940$, d'où $x = 26$ et $y = 40 - 26 = 14$. Vérification : $20 \times 26 + 30 \times 14 = 520 + 420 = 940$. Donc le commerçant a vendu 26 articles de type A et 14 articles de type B.
- (a) Heures de machine : $2x + y \leq 80$. Heures de main d'œuvre : $x + 2y \leq 70$. Les quantités sont positives : $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Le bénéfice hebdomadaire est $Z = 300x + 400y$.
(b) On trace les droites $(D_1) : 2x + y = 80$ (elle passe par $(40; 0)$ et $(0; 80)$) et $(D_2) : x + 2y = 70$ (elle passe par $(70; 0)$ et $(0; 35)$). Pour chaque inéquation, on teste l'origine : $0 \leq 80$ et $0 \leq 70$ sont vraies, donc le demi-plan solution est celui qui contient O ; on hachure l'autre demi-plan. Avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$, l'ensemble des solutions admissibles est le quadrilatère $OABC$ non hachuré du premier quadrant.
(c) Les sommets sont $O(0; 0)$, $A(40; 0)$ (intersection de (D_1) avec l'axe des abscisses), $C(0; 35)$ (intersection de (D_2) avec l'axe des ordonnées) et B , intersection de (D_1) et (D_2) : de $2x + y = 80$ on tire $y = 80 - 2x$, puis $x + 2(80 - 2x) = 70$ donne $-3x = -90$, soit $x = 30$ et $y = 20$: $B(30; 20)$. Le maximum de Z est atteint en un sommet : $Z(O) = 0$, $Z(A) = 300 \times 40 = 12\,000$, $Z(B) = 300 \times 30 + 400 \times 20 = 9\,000 + 8\,000 = 17\,000$, $Z(C) = 400 \times 35 = 14\,000$. Donc le bénéfice est maximal pour 30 tables et 20 armoires par semaine ; il vaut alors 17 000 DH.

Généralités sur les fonctions

Solution 3.

- $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =] - \infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
- Pour tout $x \neq 1$: $1 + \frac{3}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = \frac{x+2}{x-1} = f(x)$.
- Soient x_1 et x_2 deux réels de $]1, +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$. D'après la question 2 : $f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2-1} - \frac{3}{x_1-1} = \frac{3(x_1-1)-3(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{3(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$. Or $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 - 1 > 0$ et $x_2 - 1 > 0$, donc $f(x_2) - f(x_1) < 0$, c'est-à-dire $f(x_2) < f(x_1)$. Donc f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.
- Soit $x \in [2, 4]$. Comme $[2, 4] \subset]1, +\infty[$ et que f est décroissante sur cet intervalle, $2 \leq x \leq 4$ entraîne $f(4) \leq f(x) \leq f(2)$. Or $f(2) = \frac{4}{1} = 4$ et $f(4) = \frac{6}{3} = 2$. Donc pour tout $x \in [2, 4]$: $2 \leq f(x) \leq 4$.
- g est définie sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur $x^2 + 1$ ne s'annule jamais), ensemble symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x : $g(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -g(x)$. Donc g est impaire, et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
- $(f \circ h)(x) = f(h(x))$ existe si et seulement si $x \in D_h$ et $h(x) \in D_f$, c'est-à-dire $x - 1 \geq 0$ et $\sqrt{x-1} \neq 1$. Or $\sqrt{x-1} = 1 \iff x - 1 = 1 \iff x = 2$. Donc $D_{f \circ h} = [1, 2[\cup]2, +\infty[$. Pour $x = 5$: $h(5) = \sqrt{4} = 2$ et $(f \circ h)(5) = f(2) = 4$.

7. D'après la question 2, pour tout $x \neq 1$: $f(x) = \frac{3}{x-1} + 1 = u(x-1) + 1$. La courbe de $x \mapsto u(x-1)$ se déduit de (C) par la translation de vecteur $\vec{i}$, puis l'ajout de 1 correspond à la translation de vecteur $\vec{j}$. Donc (C_f) est l'image de (C) par la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ (de coordonnées $(1;1)$).