

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 2 : étude de fonctions, vecteurs et géométrie de l'espace

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 4 + 6 + 4 + 6 points.

Vecteurs de l'espace

Exercice 1 (4 points). L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 0)$ et $C(-1; 2; 1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calculer les distances AB et AC . (1 pt)
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire la nature du triangle ABC . (1 pt)
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. Quelle est la nature précise de ce parallélogramme ? (1 pt)
4. Soit $\vec{u}(1; 2; 2)$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ ne sont pas coplanaires. (1 pt)

Géométrie analytique de l'espace

Exercice 2 (6 points). L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 0)$, $C(-1; 2; 1)$ et le vecteur $\vec{n}(1; 2; 2)$.

1. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) , puis en déduire que $x + 2y + 2z - 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) . (1,5 pt)
2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 5 = 0$. Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon. (1 pt)
3. Soit (D) la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{n}$.
 - (a) Donner une représentation paramétrique de (D) . (0,5 pt)
 - (b) Déterminer les coordonnées du point H , intersection de (D) et du plan (ABC) . (1 pt)
4. (a) Calculer la distance du point Ω au plan (ABC) et vérifier qu'elle est égale à ΩH . (1 pt)
 - (b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon. (1 pt)

Étude d'une fonction irrationnelle

Exercice 3 (4 points). Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. (1 pt)
2. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x , puis dresser le tableau de variations de g . (1,5 pt)
3. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$. (1 pt)
4. Montrer que la droite d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote oblique à (C_g) en $-\infty$. (0,5 pt)

Étude d'une fonction rationnelle

Exercice 4 (6 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2-3x+3}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement les limites en 1. (1,5 pt)
2. Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$, puis en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$. (1 pt)
3. Étudier la position relative de (C_f) et de (Δ) . (0,5 pt)
4. Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f . (1,5 pt)
5. Déterminer les points de (C_f) en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -6x$. (1 pt)
6. Tracer les asymptotes et la courbe (C_f) . (0,5 pt)