

Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 1 : limites et dérivation

Durée : 1 heure. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 6 + 8 points.

Limites d'une fonction

Exercice 1 (6 points). Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - 1)$. (1 pt)
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + 4}$. (1 pt)
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. (1 pt)
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$. (1 pt)
5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{1-x}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-5}{1-x}$; interpréter graphiquement le résultat. (1 pt)
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x+1}$. (1 pt)

Dérivation

Exercice 2 (6 points).

1. Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+1}$.
 - (a) En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 4 et que $f'(4) = \frac{1}{3}$. (1,5 pt)
 - (b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. (0,5 pt)
2. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.
 - (a) $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ sur $]2, +\infty[$. (1 pt)
 - (b) $h(x) = \cos(2x) + x \sin x$ sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
 - (c) $k(x) = \sqrt{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
3. Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}$.
Calculer $\varphi'(x)$ pour $x > 0$, étudier le sens de variation de φ sur $[0, +\infty[$ et en déduire que pour tout réel $x \geq 0$: $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$. (1 pt)

Limites et dérivation

Exercice 3 (8 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,5 pt)
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (1 pt)
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats. (1 pt)
3. (a) Vérifier que pour tout $x \in D_f : f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$, puis montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$. (1 pt)
(b) Étudier la position relative de (C_f) et de (Δ) . (1 pt)
4. (a) Montrer que pour tout $x \in D_f : f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$. (1 pt)
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f . (1,5 pt)
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2. (1 pt)