

Devoir surveillé n°2 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 2 : produit scalaire, suites, trigonométrie et rotation

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 5 + 5 + 5 + 5 points.

Produit scalaire dans le plan

Exercice 1 (5 points). Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1; -1)$, $B(5; 1)$ et $C(2; 2)$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (0,5 pt)
(b) Calculer les distances AB et AC . En déduire $\cos \widehat{BAC}$ puis la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. (1 pt)
2. Calculer BC . En déduire la nature du triangle ABC . (1 pt)
3. Soit I le milieu de $[AB]$. Calculer la longueur CI à l'aide du théorème de la médiane. (0,75 pt)
4. Déterminer une équation du cercle (Γ) de diamètre $[AB]$, puis vérifier que le point C appartient à (Γ) . (1 pt)
5. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x; y)$ du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 8$, et préciser sa position par rapport à la droite (AB) . (0,75 pt)

Suites numériques

Exercice 2 (5 points). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. Montrer que si $u_n < 4$ alors $u_{n+1} < 4$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n < 4$. (1 pt)
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante. (1 pt)
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 4$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)
5. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n . (0,5 pt)
6. Calculer, en fonction de n , la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. (1 pt)

Calcul trigonométrique

Exercice 3 (5 points).

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$. (1 pt)

2. Démontrer que pour tout réel a : $\sin(3a) = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$. (1 pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) - \cos x = 0$. (1,5 pt)
4. (a) Écrire l'expression $\cos x - \sqrt{3} \sin x$ sous la forme $R \cos(x - \varphi)$ avec $R > 0$. (1 pt)
(b) En déduire les solutions dans $] -\pi, \pi]$ de l'équation $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$. (0,5 pt)

Rotation dans le plan

Exercice 4 (5 points). Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Donner l'expression analytique de R , c'est-à-dire les coordonnées $(x'; y')$ de l'image M' d'un point $M(x; y)$. (1 pt)
2. Soit $A(2; 0)$. Déterminer les coordonnées du point $A' = R(A)$, puis montrer que le triangle OAA' est équilatéral. (1 pt)
3. Déterminer les coordonnées du point $B = R(A')$. (0,5 pt)
4. Soit (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Montrer que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon, puis déterminer une équation du cercle $(C') = R((C))$, image de (C) par R . (1 pt)
5. Déterminer une équation de la droite (D') , image de l'axe des abscisses par R . (0,5 pt)
6. Soit G le centre de gravité du triangle OAA' . Calculer les coordonnées de G , puis montrer que $R(G)$ est le centre de gravité du triangle $OA'B$. (1 pt)