

# Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1 : logique, généralités sur les fonctions et barycentre

**Durée : 1 heure.** L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.  
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 6 + 7 + 7 points.

## Notions de logique

---

### Exercice 1 (6 points).

- Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant, puis écrire sa négation.
  - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 > 0$ . (1 pt)
  - $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$  est impair. (1 pt)
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$ . (1 pt)
- Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions. Démontrer à l'aide d'une table de vérité que  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ . (1 pt)
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Démontrer par contraposée : si  $n^2$  est un multiple de 3, alors  $n$  est un multiple de 3. (1 pt)
  - En déduire, par un raisonnement par l'absurde, que  $\sqrt{3}$  est un nombre irrationnel. (1 pt)

## Généralités sur les fonctions

---

**Exercice 2 (7 points).** Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ .

- Déterminer  $D_f$  et étudier la parité de  $f$ . (1 pt)
- Montrer que pour tout réel  $x : f(x) - 1 = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ . (0,5 pt)
  - Montrer que pour tout réel  $x : -1 \leq f(x) \leq 1$ , et préciser les réels pour lesquels  $f(x) = 1$  et ceux pour lesquels  $f(x) = -1$ . (1 pt)
- Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux réels positifs. Montrer que  $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ . (1 pt)
  - En déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ . (1 pt)
- En utilisant la parité de  $f$ , dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[-2, 2]$ . (1 pt)
- Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = f(\sqrt{x})$ .
  - Déterminer  $D_h$  et vérifier que  $h(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ . (0,5 pt)
  - Déterminer le sens de variation de  $h$  sur  $[0, 1]$  et sur  $[1, +\infty[$ , puis en déduire que pour tout réel  $x \geq 0 : 2\sqrt{x} \leq x + 1$ . (1 pt)

## Barycentre dans le plan

**Exercice 3 (7 points).** Soit  $ABC$  un triangle. On considère les points  $K$ ,  $L$  et  $G$  définis par :

- $K$  est le barycentre des points pondérés  $(B, 2)$  et  $(C, 3)$  ;
- $L$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$  et  $(B, 2)$  ;
- $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 2)$  et  $(C, 3)$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$  et que  $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ , puis placer les points  $K$  et  $L$  sur une figure. (1 pt)
2. (a) Montrer que  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$  et  $(K, 5)$ , puis en déduire que  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AK}$ . (1 pt)  
(b) Montrer que  $G$  est le milieu du segment  $[LC]$ . (1 pt)  
(c) En déduire une construction du point  $G$  et le placer sur la figure. (0,5 pt)
3. Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . (1 pt)
4. Le plan est rapporté au repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Déterminer les coordonnées des points  $K$ ,  $L$  et  $G$  dans ce repère. (1 pt)
5. Soit  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :
  - (a) le vecteur  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$  ; (0,75 pt)
  - (b)  $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ . (0,75 pt)