

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1 : logique, généralités sur les fonctions et barycentre

Notions de logique

Solution 1.

- Pour tout réel $x : x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$. La proposition est **vraie**. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \leq 0$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}, n^2 + n = n(n + 1)$. Raisonnons par disjonction de cas : si n est pair, $n = 2k$ et $n(n + 1) = 2k(n + 1)$ est pair ; si n est impair, $n + 1 = 2k$ est pair et $n(n + 1) = 2kn$ est pair. Dans tous les cas $n^2 + n$ est pair : aucun entier naturel ne convient, la proposition est **fausse**. Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ est pair (et c'est cette négation qui est vraie).
 - Pour $x = -1$, l'équation $y^2 = -1$ n'a aucune solution réelle car $y^2 \geq 0$ pour tout réel y . La proposition est **fausse**. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \neq x$.
- Table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Les colonnes de $P \Rightarrow Q$ et de $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ sont identiques : les deux propositions ont toujours la même valeur de vérité, donc $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$. C'est ce qui justifie le raisonnement par contraposée.

- La contraposée de l'implication est : « si n n'est pas un multiple de 3, alors n^2 n'est pas un multiple de 3 ». Supposons que n n'est pas un multiple de 3 : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$.
 - Si $n = 3k + 1 : n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$.
 - Si $n = 3k + 2 : n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$.

Dans les deux cas n^2 s'écrit $3q + 1$ avec $q \in \mathbb{N} : n^2$ n'est pas un multiple de 3. La contraposée est vraie, donc l'implication « si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3 » est vraie.

(b) Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel. Comme $\sqrt{3} > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré : $p^2 = 3q^2$, donc p^2 est un multiple de 3, donc p est un multiple de 3 d'après la question (a). Écrivons $p = 3m$ avec $m \in \mathbb{N}^* : 9m^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3m^2$. Ainsi q^2 est un multiple de 3, donc q aussi (question (a)). Les entiers p et q sont tous deux multiples de 3, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. L'hypothèse est donc fausse : $\sqrt{3}$ est **irrationnel**.

Généralités sur les fonctions

Solution 2.

- Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc le dénominateur ne s'annule jamais : $D_f = \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x : $f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x)$. Donc **f est impaire** (sa courbe est symétrique par rapport à l'origine).
- (a) $f(x) - 1 = \frac{2x-(x^2+1)}{x^2+1} = -\frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
(b) Comme $(x-1)^2 \geq 0$ et $x^2 + 1 > 0$, on a $f(x) - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \leq 1$, avec égalité si et seulement si $(x-1)^2 = 0$, soit $x = 1$. De même $f(x) + 1 = \frac{2x+x^2+1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$, donc $f(x) \geq -1$, avec égalité si et seulement si $x = -1$. Conclusion : pour tout réel x , $-1 \leq f(x) \leq 1$; $f(x) = 1$ uniquement pour $x = 1$ et $f(x) = -1$ uniquement pour $x = -1$.
- (a) En réduisant au même dénominateur : $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2(x_1^2+1)-2x_1(x_2^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$. Le numérateur vaut $2(x_1^2x_2 + x_2 - x_1x_2^2 - x_1) = 2[(x_2 - x_1) - x_1x_2(x_2 - x_1)] = 2(x_2 - x_1)(1 - x_1x_2)$, d'où la formule demandée.
(b) Le dénominateur $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$ est strictement positif.
 - Soient $x_1, x_2 \in [0, 1]$ avec $x_1 < x_2$. Alors $x_2 - x_1 > 0$ et, comme $0 \leq x_1 < 1$ et $0 < x_2 \leq 1$, on a $x_1x_2 < 1$, donc $1 - x_1x_2 > 0$. Ainsi $f(x_2) - f(x_1) > 0$: **f est strictement croissante sur $[0, 1]$** .
 - Soient $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ avec $x_1 < x_2$. Alors $x_2 - x_1 > 0$ et $x_1x_2 > 1$ (produit de deux réels dont l'un est ≥ 1 et l'autre > 1), donc $1 - x_1x_2 < 0$ et $f(x_2) - f(x_1) < 0$: **f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$** .
- f est impaire. Soient $x_1 < x_2$ dans $[-1, 0]$; alors $0 \leq -x_2 < -x_1 \leq 1$, donc $f(-x_2) < f(-x_1)$ (croissance sur $[0, 1]$), soit $-f(x_2) < -f(x_1)$, c'est-à-dire $f(x_1) < f(x_2)$: f est strictement croissante sur $[-1, 0]$. De la même façon, la décroissance de f sur $[1, 2]$ donne la décroissance de f sur $[-2, -1]$. Avec $f(-2) = -\frac{4}{5}$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{4}{5}$:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-\frac{4}{5} \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	$\frac{4}{5}$

- f décroît de $-\frac{4}{5}$ à -1 sur $[-2, -1]$, croît de -1 à 1 sur $[-1, 1]$ et décroît de 1 à $\frac{4}{5}$ sur $[1, 2]$.
- (a) $h(x)$ existe si et seulement si $\sqrt{x}$ existe et $\sqrt{x} \in D_f = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $x \geq 0$: $D_h = [0, +\infty[$. Pour $x \geq 0$: $h(x) = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2+1} = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$.
(b) Notons $u : x \rightarrow \sqrt{x}$; h est la composée de u suivie de f . La fonction u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
 - Sur $[0, 1]$: $u([0, 1]) = [0, 1]$ et f est strictement croissante sur $[0, 1]$. Composée de deux fonctions croissantes, **h est strictement croissante sur $[0, 1]$** .
 - Sur $[1, +\infty[$: $u([1, +\infty[) = [1, +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, **h est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$** .

Donc h admet en $x = 1$ un maximum sur $[0, +\infty[$, qui vaut $h(1) = f(1) = 1$. Pour tout $x \geq 0$: $h(x) \leq 1$, soit $\frac{2\sqrt{x}}{x+1} \leq 1$, et comme $x + 1 > 0$: $2\sqrt{x} \leq x + 1$.

Barycentre dans le plan

Solution 3.

1. K est le barycentre de $(B, 2)$ et $(C, 3)$, avec $2 + 3 = 5 \neq 0$. D'après la caractérisation vectorielle, pour tout point M : $\overrightarrow{MK} = \frac{2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}}{5}$. Avec $M = B$: $\overrightarrow{BK} = \frac{2\overrightarrow{BB} + 3\overrightarrow{BC}}{5} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$. De même, L est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$ ($1 + 2 = 3 \neq 0$) et avec $M = A$: $\overrightarrow{AL} = \frac{1\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB}}{3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On place K sur $[BC]$ aux trois cinquièmes à partir de B , et L sur $[AB]$ aux deux tiers à partir de A .
2. (a) G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$ et $2 + 3 = 5 \neq 0$. D'après le théorème d'associativité, on peut remplacer les points pondérés $(B, 2)$ et $(C, 3)$ par leur barycentre K affecté du poids $2 + 3 = 5$: G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(K, 5)$. Alors, pour $M = A$: $\overrightarrow{AG} = \frac{1\overrightarrow{AA} + 5\overrightarrow{AK}}{6} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AK}$.
(b) De même, $1 + 2 = 3 \neq 0$ et L est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$: par associativité, G est le barycentre de $(L, 3)$ et $(C, 3)$. Par homogénéité (division des poids par 3), G est le barycentre de $(L, 1)$ et $(C, 1)$: **G est le milieu de $[LC]$** .
(c) D'après (a), $G \in (AK)$; d'après (b), $G \in (LC)$. Ces deux droites sont sécantes (le point A n'appartient pas à (LC) puisque $L \in (AB)$, $L \neq A$ et $C \notin (AB)$). Donc G est le point d'intersection des droites (AK) et (LC) ; on peut aussi le placer directement comme milieu de $[LC]$.
3. Avec la caractérisation vectorielle du barycentre de trois points (somme des poids $1 + 2 + 3 = 6$) et $M = A$: $\overrightarrow{AG} = \frac{1\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{6} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
4. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$. Par la formule des coordonnées d'un barycentre :
 - K : $x_K = \frac{2 \times 1 + 3 \times 0}{5} = \frac{2}{5}$ et $y_K = \frac{2 \times 0 + 3 \times 1}{5} = \frac{3}{5}$, donc $K(\frac{2}{5}; \frac{3}{5})$;
 - L : $x_L = \frac{1 \times 0 + 2 \times 1}{3} = \frac{2}{3}$ et $y_L = 0$, donc $L(\frac{2}{3}; 0)$;
 - G : d'après la question 3, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$.Vérification : le milieu de $[LC]$ a pour coordonnées $(\frac{\frac{2}{3} + 0}{2}; \frac{0 + 1}{2}) = (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$, ce qui confirme la question 2(b).
5. Comme G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$, on a pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$. De même, I étant le milieu de $[BC]$ (barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$) : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.
(a) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $6\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. L'ensemble cherché est **la droite passant par G et parallèle à (AB)** (le point G lui-même convient car $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$).
(b) L'égalité s'écrit $\|6\overrightarrow{MG}\| = 3\|2\overrightarrow{MI}\|$, soit $6MG = 6MI$, soit $MG = MI$. Les points $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ et $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ sont distincts, donc l'ensemble cherché est **la médiatrice du segment $[GI]$** .