

Devoir surveillé n°4 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 2 (mini examen blanc) : géométrie dans l'espace, probabilités, problème d'analyse

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 5 + 10 points.

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 (5 points). L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(3, 0, 0)$ et $C(1, -1, 2)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés. (0,5 pt)
(b) Montrer que $x + 2y + 2z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) . (0,75 pt)
(c) Calculer l'aire du triangle ABC . (0,5 pt)
2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 6z - 8 = 0$. Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R . (0,75 pt)
3. (a) Calculer la distance du point Ω au plan (ABC) et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera le rayon r . (0,75 pt)
(b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC) . (0,5 pt)
(c) En déduire les coordonnées du centre H du cercle (Γ) . (0,5 pt)
4. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans parallèles au plan (ABC) et tangents à la sphère (S) . (0,75 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 2 (5 points). Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher : quatre boules rouges, trois boules vertes et deux boules noires.

Partie A. On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 A : « les trois boules tirées sont de la même couleur » ; (0,75 pt)
 B : « exactement une des boules tirées est rouge » ; (0,75 pt)
 C : « au moins une des boules tirées est noire ». (0,75 pt)
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
 (a) Déterminer la loi de probabilité de X . (1,25 pt)
 (b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. (0,5 pt)

Partie B. On tire maintenant successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note R_1 l'événement « la première boule tirée est rouge » et R_2 l'événement « la deuxième boule tirée est rouge ».

1. Calculer $P(R_2 \mid R_1)$ puis $P(R_1 \cap R_2)$. (0,5 pt)
2. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(R_2)$. (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 3 (10 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x - 1)e^{-x} + 1,$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A : étude de la fonction.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,5 pt)
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)
(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = (2 - x)e^{-x}$. (0,5 pt)
(b) Dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
3. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de la droite (D) d'équation $y = 1$. (0,5 pt)
4. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ passe par l'origine O et déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en O . (0,5 pt)
5. Calculer $f''(x)$ et montrer que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées. (0,5 pt)
6. Tracer (D) , (T) et $(\mathcal{C})$. (0,25 pt)

Partie B : équation différentielle et calcul intégral.

1. Montrer que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 1 + e^{-x}$. (0,5 pt)
2. (a) Montrer qu'une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - f$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$. (0,5 pt)
(b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) . (0,5 pt)
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 (1 - x)e^{-x} dx = \frac{1}{e}$. (0,75 pt)
4. En déduire, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,5 pt)
5. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. (0,5 pt)

Partie C : suite récurrente. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1$. (0,75 pt)
2. (a) Vérifier que pour tout réel x : $f(x) - x = (x - 1)(e^{-x} - 1)$. (0,25 pt)
(b) En déduire que la suite (u_n) est croissante. (0,5 pt)
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. (1 pt)