

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 2 (mini examen blanc) : géométrie dans l'espace, probabilités, problème d'analyse

Géométrie dans l'espace

Solution 1.

- (a) $\overrightarrow{AB}(2, -1, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(0, -2, 2)$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = ((-1) \times 2 - 0 \times (-2), 0 \times 0 - 2 \times 2, 2 \times (-2) - (-1) \times 0) = (-2, -4, -4)$. Ce vecteur n'est pas nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A , B et C ne sont pas alignés.

(b) Le vecteur $\vec{n} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = (1, 2, 2)$ est normal au plan (ABC) . Une équation de ce plan est donc $x + 2y + 2z + d = 0$. Comme $A \in (ABC)$: $1 + 2 + 0 + d = 0$, soit $d = -3$. Ainsi $(ABC) : x + 2y + 2z - 3 = 0$. (Vérification : $B : 3 + 0 + 0 - 3 = 0$; $C : 1 - 2 + 4 - 3 = 0$.)

(c) L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3$ (unités d'aire).
- En regroupant les termes : $x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 6z - 8 = 0$, soit $(x - 2)^2 - 4 + (y - 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 - 8 = 0$, c'est-à-dire $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. (S) est la sphère de centre $\Omega(2, 2, 3)$ et de rayon $R = 5$.
- (a) $d(\Omega, (ABC)) = |2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 - 3|_{\sqrt{1+4+4}} = |9|_3 = 3$. Comme $d(\Omega, (ABC)) = 3 < 5 = R$, le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

(b) (Δ) passe par $\Omega(2, 2, 3)$ et a pour vecteur directeur le vecteur normal $\vec{n}(1, 2, 2)$ du plan :

$$(\Delta) : \begin{cases} x=2+t \\ y=2+2t, t \in \mathbb{R}. \\ z=3+2t \end{cases}$$

(c) Le centre H de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) , c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et du plan. On remplace dans l'équation du plan : $(2 + t) + 2(2 + 2t) + 2(3 + 2t) - 3 = 9 + 9t = 0$, donc $t = -1$ et $H(1, 0, 1)$. (Vérification : $\Omega H = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 = d(\Omega, (ABC))$.)
- Un plan parallèle à (ABC) a une équation de la forme $x + 2y + 2z + d = 0$. Il est tangent à (S) si et seulement si $d(\Omega, P) = R$, soit $|2 + 4 + 6 + d|_3 = 5$, c'est-à-dire $|12 + d| = 15$, donc $d = 3$ ou $d = -27$. Les deux plans cherchés ont pour équations $x + 2y + 2z + 3 = 0$ et $x + 2y + 2z - 27 = 0$.

Calcul des probabilités

Solution 2.

Partie A. Les tirages sont simultanés : l'univers est l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi 9, et $\text{card}(\Omega) = \binom{9}{3} = 84$; il y a équiprobabilité.

1. A : les trois boules sont rouges ($\binom{4}{3} = 4$ façons) ou vertes ($\binom{3}{3} = 1$ façon) ; il n'y a que deux noires. Donc $P(A) = \frac{4+1}{84} = \frac{5}{84}$.
 B : une rouge parmi 4 et deux boules parmi les 5 non rouges : $P(B) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{5}{2}}{84} = \frac{4 \times 10}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$.
 C : l'événement contraire $\overline{C}$ est « aucune boule noire », soit trois boules parmi les 7 non noires : $P(\overline{C}) = \frac{\binom{7}{3}}{84} = \frac{35}{84}$, donc $P(C) = 1 - \frac{35}{84} = \frac{49}{84} = \frac{7}{12}$.
2. (a) X prend les valeurs 0, 1, 2, 3. Pour k rouges, on choisit k boules parmi les 4 rouges et $3-k$ parmi les 5 autres : $P(X=0) = \frac{\binom{5}{3}}{84} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$, $P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{2}}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$, $P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$, $P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}}{84} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$. (Contrôle : $10 + 40 + 30 + 4 = 84$.)
 (b) $E(X) = 0 \times \frac{10}{84} + 1 \times \frac{40}{84} + 2 \times \frac{30}{84} + 3 \times \frac{4}{84} = \frac{40+60+12}{84} = \frac{112}{84} = \frac{4}{3}$.

Partie B.

1. Si R_1 est réalisé, il reste 8 boules dont 3 rouges : $P(R_2 | R_1) = \frac{3}{8}$. Alors $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2 | R_1) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$.
2. Les événements R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers, et si $\overline{R_1}$ est réalisé il reste 8 boules dont 4 rouges : $P(R_2 | \overline{R_1}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Formule des probabilités totales : $P(R_2) = P(R_1)P(R_2 | R_1) + P(\overline{R_1})P(R_2 | \overline{R_1}) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{12}{72} + \frac{20}{72} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$. (On remarque que $P(R_2) = P(R_1)$.)

Problème d'analyse

Solution 3.

Partie A.

1. (a) $f(x) = xe^{-x} - e^{-x} + 1$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: la droite $(D) : y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
 (b) Quand $x \rightarrow -\infty$: $x-1 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $(x-1)e^{-x} \rightarrow -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 (c) Pour $x \neq 0$: $\frac{f(x)}{x} = (1 - \frac{1}{x})e^{-x} + \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$, $e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, avec $((x-1)e^{-x})' = 1 \times e^{-x} + (x-1)(-e^{-x})$: $f'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (1-x+1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$.
 (b) Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2-x$: $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, 2[$, $f'(2) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]2, +\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$, avec un maximum $f(2) = e^{-2} + 1 = 1 + \frac{1}{e^2}$; f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
3. $f(x) - 1 = (x-1)e^{-x}$ a le signe de $x-1$. Donc $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (D) sur $]-\infty, 1[$, au-dessus de (D) sur $]1, +\infty[$, et coupe (D) au point d'abscisse 1, de coordonnées $(1, 1)$.
4. $f(0) = (0-1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$: $(\mathcal{C})$ passe par O . De plus $f'(0) = 2e^0 = 2$, donc $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x$.
5. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = -e^{-x} + (2-x)(-e^{-x}) = (-1-2+x)e^{-x} = (x-3)e^{-x}$. $f''(x)$ a le signe de $x-3$: elle s'annule en 3 en changeant de signe (négative avant, positive

après). La courbe $(\mathcal{C})$ est concave sur $] -\infty, 3]$, convexe sur $[3, +\infty[$ et admet un point d'inflexion $I(3, f(3))$ avec $f(3) = 2e^{-3} + 1 = 1 + \frac{2}{e^3}$.

6. Tracé : la courbe vient de $-\infty$ (branche parabolique verticale), passe par O avec la tangente $(T) : y = 2x$, coupe (D) en $(1, 1)$, atteint son maximum en $(2, 1 + \frac{1}{e^2})$, change de concavité en I , puis redescend vers (D) en restant au-dessus d'elle.

Partie B.

1. $f'(x) + f(x) = (2-x)e^{-x} + (x-1)e^{-x} + 1 = (2-x+x-1)e^{-x} + 1 = e^{-x} + 1$. Donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Soit h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k = h - f$. Alors $k' + k = (h' + h) - (f' + f) = (h' + h) - (1 + e^{-x})$. Donc $h' + h = 1 + e^{-x}$ si et seulement si $k' + k = 0$: h est solution de (E) si et seulement si $h - f$ est solution de (E_0) .
(b) Les solutions de $(E_0) : y' = -y$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $h(x) = f(x) + Ce^{-x} = (x-1+C)e^{-x} + 1$, $C \in \mathbb{R}$.
3. On pose $u(x) = 1 - x$ et $v'(x) = e^{-x}$, d'où $u'(x) = -1$ et $v(x) = -e^{-x}$; u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0, 1]$. Par intégration par parties : $\int_0^1 (1-x)e^{-x} dx = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-1)(-e^{-x}) dx = (0+1) - \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - [-e^{-x}]_0^1 = 1 - (-\frac{1}{e} + 1) = \frac{1}{e}$.
4. Sur $[0, 1]$, $f(x) \leq 1$ (question A.3), donc l'aire du domaine est $\mathcal{A} = \int_0^1 (1-f(x)) dx = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx = \frac{1}{e}$ unité d'aire (car $1-f(x) = -(x-1)e^{-x} = (1-x)e^{-x}$). L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, donc $\mathcal{A} = \frac{4}{e} \text{ cm}^2 (\approx 1,47 \text{ cm}^2)$.
5. $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 (1-f(x)) dx = 1 - \frac{1}{e}$.

Partie C.

1. Sur $[0, 1]$, f est continue et strictement croissante (car $[0, 1] \subset]-\infty, 2]$), avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$: donc $f([0, 1]) = [0, 1]$ (l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f). **Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{2} \in [0, 1]$. **Hérédité** : si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, 1]) = [0, 1]$. **Conclusion** : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) $(x-1)(e^{-x} - 1) = (x-1)e^{-x} - (x-1) = (x-1)e^{-x} + 1 - x = f(x) - x$.
(b) Pour $x \in [0, 1]$: $x-1 \leq 0$ et, comme $-x \leq 0$, $e^{-x} \leq e^0 = 1$, soit $e^{-x} - 1 \leq 0$. Le produit est donc positif : $f(x) - x \geq 0$ sur $[0, 1]$. Comme $u_n \in [0, 1]$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$: la suite (u_n) est croissante.
3. (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge (théorème de la convergence monotone) vers un réel $\ell \in [0, 1]$ (car $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\ell = f(\ell)$, soit $(\ell-1)(e^{-\ell} - 1) = 0$: $\ell = 1$ ou $e^{-\ell} = 1$, c'est-à-dire $\ell = 1$ ou $\ell = 0$. Or la suite est croissante, donc $\ell \geq u_0 = \frac{1}{2} > 0$, ce qui exclut $\ell = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.