

Devoir surveillé n°3 : Mathématiques

Semestre 2, devoir 1 : nombres complexes, calcul intégral, équations différentielles

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 4 + 6 + 10 points.

Équations différentielles

Exercice 1 (4 points).

- (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y' + 3y = 0$. (0,5 pt)
(b) Déterminer la solution f de (E_1) qui vérifie $f(0) = 2$. (0,5 pt)
- On considère l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 9y = 0$.
(a) Donner la forme générale des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
(b) Déterminer la solution g de (E_2) qui vérifie $g(0) = 1$ et $g'(0) = 3$. (0,5 pt)
(c) Montrer que pour tout réel $x : g(x) = \sqrt{2} \cos(3x - \frac{\pi}{4})$. (0,5 pt)
- Un corps, initialement à la température de 85°C , est placé dans une salle maintenue à 25°C . Sa température $T(t)$ (en degrés Celsius) à l'instant t (en minutes) vérifie, pour $t \geq 0$, l'équation différentielle

$$(E_3) : T'(t) = -0,2(T(t) - 25).$$

- Résoudre l'équation différentielle (E_3) . (0,5 pt)
- Déterminer l'expression de $T(t)$ sachant que $T(0) = 85$. (0,5 pt)
- Au bout de combien de temps la température du corps atteint-elle 55°C ? On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,1 minute près. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (6 points).

- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. (0,75 pt)
 - On pose $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \bar{a}$. Écrire a et b sous forme exponentielle. (0,75 pt)
 - Montrer que $a^3 = -8$ et en déduire la forme algébrique de a^{2025} . (0,75 pt)
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8$; on donnera les solutions sous forme exponentielle puis sous forme algébrique. (1 pt)
 - On considère les points A , B et D d'affixes respectives a , b et $d = 4$, et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- (a) Déterminer l'affixe a' du point $A' = R(A)$ sous forme algébrique. (0,5 pt)
(b) En déduire la nature du triangle OAA' . (0,5 pt)
6. (a) Écrire le nombre complexe $\frac{d-a}{b-a}$ sous forme exponentielle. (0,75 pt)
(b) En déduire la nature du triangle ABD . (0,5 pt)
7. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z ($z \neq b$) tels que le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ soit imaginaire pur. (0,5 pt)

Calcul intégral

Exercice 3 (10 points). Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x},$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A : étude de la fonction.

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,5 pt)
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)
- (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$. (0,75 pt)
(b) Dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1. (0,25 pt)
- Tracer (T) et $(\mathcal{C})$. (0,5 pt)

Partie B : calcul intégral.

- Montrer que la fonction $F : x \rightarrow \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
- (a) Calculer $I = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$. (0,75 pt)
(b) En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$. (0,5 pt)
- À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$. (1,25 pt)
- En déduire $K = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x^2} dx$. (0,5 pt)
- (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $L = \int_1^e \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)^2 dx = 5 - \frac{10}{e}$. (1 pt)
(b) En déduire le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de $(\mathcal{C})$ comprise entre les points d'abscisses 1 et e (on donnera le résultat en unités de volume). (0,5 pt)
- Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[1, e]$. (0,5 pt)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$. Calculer u_n en fonction de n et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)