

Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 1 : nombres complexes, calcul intégral, équations différentielles

Équations différentielles

Solution 1.

- (a) (E_1) s'écrit $y' = -3y$: ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$.
(b) $f(0) = Ce^0 = C = 2$, donc $f(x) = 2e^{-3x}$.
- (a) (E_2) est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 3$: ses solutions sont les fonctions $x \rightarrow A \cos(3x) + B \sin(3x)$, $A, B \in \mathbb{R}$.
(b) $g(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$ et $g'(x) = -3A \sin(3x) + 3B \cos(3x)$. $g(0) = A = 1$ et $g'(0) = 3B = 3$, donc $B = 1$: $g(x) = \cos(3x) + \sin(3x)$.
(c) $\sqrt{2} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(3x) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(3x) \sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(3x)) = \cos(3x) + \sin(3x) = g(x)$.
- (a) (E_3) s'écrit $T' = -0,2T + 5$, de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,2$ et $b = 5$. Ses solutions sont $T(t) = Ce^{-0,2t} - \frac{b}{a} = Ce^{-0,2t} + 25$, $C \in \mathbb{R}$.
(b) $T(0) = C + 25 = 85$ donne $C = 60$: $T(t) = 60e^{-0,2t} + 25$.
(c) $T(t) = 55$ équivaut à $60e^{-0,2t} = 30$, soit $e^{-0,2t} = \frac{1}{2}$, donc $-0,2t = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$ et $t = \frac{\ln 2}{0,2} = 5 \ln 2 \approx 3,5$ minutes (valeur exacte $5 \ln 2 \approx 3,47$).

Nombres complexes

Solution 2.

- $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2 < 0$. Les solutions sont $z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2}$: $S = \{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$.
- $|a| = \sqrt{1+3} = 2$ et $a = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$, donc $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Par conjugaison, $b = \bar{a} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- $a^3 = 2^3 e^{i\pi} = 8 \times (-1) = -8$. $2025 = 3 \times 675$, donc $a^{2025} = (a^3)^{675} = (-8)^{675} = -8^{675}$ (car 675 est impair), soit $a^{2025} = -2^{2025}$: c'est un réel strictement négatif.
- On écrit $-8 = 8e^{i\pi}$ et $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$). Alors $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$ et $z^3 = -8$ équivaut à $r^3 = 8$ et $3\theta = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), soit $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$. On obtient trois solutions (pour $k = 0, 1, 2$) : $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} = a$, $z_1 = 2e^{i\pi} = -2$, $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3} = b$. $S = \{1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}\}$.
- (a) L'écriture complexe de R est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$. Donc $a' = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i\sqrt{3}$.
(b) La rotation conserve les distances : $OA' = OA = 2$, donc le triangle OAA' est isocèle

- en O ; de plus $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral : OAA' est équilatéral. (Vérification : $AA' = |a' - a| = |-2| = 2$.)
6. (a) $d - a = 3 - i\sqrt{3}$ et $b - a = -2i\sqrt{3}$. Donc $\frac{d-a}{b-a} = \frac{3-i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}} = \frac{(3-i\sqrt{3})i}{-2i^2\sqrt{3}} = \frac{3i+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3i}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- (b) $|\frac{d-a}{b-a}| = \frac{AD}{AB} = 1$, donc $AD = AB$, et $\arg(\frac{d-a}{b-a}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le triangle ABD est isocèle en A avec un angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{3}$: il est équilatéral (et direct).
7. Pour $z \neq b$ et $z \neq a$: $\frac{z-a}{z-b}$ est imaginaire pur (non nul) si et seulement si $\arg(\frac{z-a}{z-b}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$: le triangle MAB est rectangle en M , donc M appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Pour $z = a$ le quotient vaut 0, qui est imaginaire pur, et A est sur ce cercle. L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B ; son centre est le point $I(1, 0)$, milieu de $[AB]$, et son rayon vaut $\frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Calcul intégral

Solution 3.

Partie A.

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: l'axe des ordonnées (droite $x = 0$) est asymptote verticale à (C) .
- (b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses (droite $y = 0$) est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.
2. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, et avec la formule $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $u(x) = 1 + \ln x$, $v(x) = x$: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$.
- (b) $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-\ln x$: $f'(x) > 0$ sur $]0, 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]1, +\infty[$. f est strictement croissante sur $]0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$; elle admet un maximum en 1 égal à $f(1) = 1$. Aux bornes, f tend vers $-\infty$ en 0^+ et vers 0 en $+\infty$.
3. $f(x) = 0$ équivaut à $1 + \ln x = 0$ (car $x > 0$), soit $\ln x = -1$, soit $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Comme $x > 0$, $f(x)$ a le signe de $1 + \ln x$, et $\ln$ est strictement croissante : $f(x) < 0$ sur $]0, \frac{1}{e}[$, $f(\frac{1}{e}) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.
4. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$: (T) est la tangente horizontale d'équation $y = 1$.
5. Tracé : asymptote verticale $x = 0$, courbe croissante de $-\infty$ jusqu'au maximum $(1, 1)$ où la tangente est horizontale, passage par $(\frac{1}{e}, 0)$, puis décroissance vers 0 avec l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$ (la courbe reste au-dessus de cet axe pour $x > \frac{1}{e}$).

Partie B.

1. F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{1 + \ln x}{x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. (a) $I = [F(x)]_{\frac{1}{e}}^1 = F(1) - F(\frac{1}{e}) = (0 + 0) - \left(\ln(\frac{1}{e}) + \frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{e}))^2 \right) = -(-1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
- (b) Sur $[\frac{1}{e}, 1]$, $f(x) \geq 0$ (partie A, question 3), donc l'aire du domaine est $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = I = \frac{1}{2}$ unité d'aire. L'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm}^2$.
3. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$; u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[1, e]$. Par intégration par parties : $J = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x} \right) dx = \left(-\frac{\ln e}{e} + \frac{\ln 1}{1} \right) + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) = 1 - \frac{2}{e}$.

4. Par linéarité de l'intégrale : $K = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e + J = \left(1 - \frac{1}{e}\right) + \left(1 - \frac{2}{e}\right) = 2 - \frac{3}{e}$.
5. (a) $L = \int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x^2} dx$. On pose $u(x) = (1 + \ln x)^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, d'où $u'(x) = 2(1 + \ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{2(1+\ln x)}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$. Par intégration par parties : $L = \left[-\frac{(1+\ln x)^2}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{2(1+\ln x)}{x} \times \frac{1}{x} dx = \left(-\frac{(1+1)^2}{e} + \frac{(1+0)^2}{1}\right) + 2 \int_1^e \frac{1+\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{4}{e} + 2K$. Avec $K = 2 - \frac{3}{e}$: $L = 1 - \frac{4}{e} + 4 - \frac{6}{e} = 5 - \frac{10}{e}$.
- (b) Sur $[1, e]$, $f(x) > 0$. Le volume du solide de révolution est $V = \pi \int_1^e (f(x))^2 dx = \pi L = \pi\left(5 - \frac{10}{e}\right)$ unités de volume (soit $V \approx 4,15$ u.v.).
6. $\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e-1} [F(x)]_1^e = \frac{F(e)-F(1)}{e-1} = \frac{1+\frac{1}{2}-0}{e-1} = \frac{3}{2(e-1)}$ (soit $\mu \approx 0,87$).
7. La fonction $x \rightarrow \frac{(\ln x)^n}{x} = \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$ est de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = \ln x$: une primitive est $x \rightarrow \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$. Donc $u_n = \left[\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^e = \frac{1^{n+1}-0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. (On retrouve $u_0 = \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.