

Devoir surveillé n°2 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 2 : primitives, logarithme, nombres complexes, exponentielle

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 5 + 3 + 3 + 9 points.

Nombres complexes

Exercice 1 (5 points). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$. (1 pt)
2. On pose $a = 3 + 2i$. Écrire sous forme algébrique les nombres a^2 et $\frac{a}{a}$, et calculer $|a|$. (1,25 pt)
3. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z - 3 + 2i| = 2$. (0,75 pt)
4. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels), on pose $Z = (z - 3)(\bar{z} + 2i)$.
 - (a) Montrer que $\text{Re}(Z) = x^2 + y^2 - 3x - 2y$ et $\text{Im}(Z) = 2x + 3y - 6$. (0,75 pt)
 - (b) Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que Z soit réel. (0,5 pt)
 - (c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur ; on précisera son centre Ω et son rayon. (0,75 pt)

Fonctions logarithmiques et primitives

Exercice 2 (3 points).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - (a) l'équation $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 2 \ln 2$; (0,75 pt)
 - (b) l'inéquation $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 \leq 0$. (0,75 pt)
2. (a) Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ qui vérifie $F(0) = 1$. (0,5 pt)
- (b) Déterminer une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $g : x \rightarrow \frac{(\ln x)^2}{x}$. (0,5 pt)
- (c) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \rightarrow xe^{-x^2}$. (0,5 pt)

Suites numériques

Exercice 3 (3 points). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{eu_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 (on donnera les résultats sous la forme e^r avec r rationnel). (0,5 pt)
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$. (0,25 pt)
3. On pose $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}$. (0,5 pt)

4. On pose $w_n = v_n - 1$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (0,5 pt)
5. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,75 pt)
6. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par e . (0,5 pt)

Problème d'analyse

Exercice 4 (9 points). Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 1$.

1. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g (les limites ne sont pas demandées). (0,75 pt)
2. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5 pt)

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 - xe^{-x},$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 pt)
(b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (on pourra écrire $f(x) = x(1 - e^{-x}) + 1$). (0,75 pt)
2. (a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. (0,5 pt)
(b) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D) sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,75 pt)
4. (a) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$. (1 pt)
(b) Dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. (0,25 pt)
6. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions α et β dans $\mathbb{R}$, avec $\alpha < 0 < \beta$. (0,75 pt)
(b) Vérifier que $1,3 < \beta < 1,4$. (0,5 pt)
7. Tracer (D) , (T) et $(\mathcal{C})$ (on prendra $\alpha \approx -0,8$ et $\beta \approx 1,35$). (0,75 pt)

Partie C.

1. Montrer que la fonction $H : x \rightarrow -(x + 1)e^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \rightarrow xe^{-x}$. (0,5 pt)
2. En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$. (0,5 pt)