

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2 : primitives, logarithme, nombres complexes, exponentielle

Nombres complexes

Solution 1.

- $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 = (4i)^2 < 0$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z = \frac{6 \pm 4i}{2}$, soit $S = \{3 + 2i, 3 - 2i\}$.
- $a^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$. $|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. $\frac{a}{a} = \frac{a \times a}{a \times a} = \frac{a^2}{|a|^2} = \frac{5+12i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$.
- $|z - 3 + 2i| = |z - (3 - 2i)| = BM$, où B est le point d'affixe $3 - 2i$. L'ensemble (E) est donc le cercle de centre $B(3, -2)$ et de rayon 2.
- (a) $z - 3 = (x - 3) + iy$ et $\bar{z} + 2i = x + i(2 - y)$. Donc $Z = (x - 3)x + i(x - 3)(2 - y) + ixy + i^2y(2 - y) = (x^2 - 3x - 2y + y^2) + i(2x - xy - 6 + 3y + xy) = (x^2 + y^2 - 3x - 2y) + i(2x + 3y - 6)$. Ainsi $\text{Re}(Z) = x^2 + y^2 - 3x - 2y$ et $\text{Im}(Z) = 2x + 3y - 6$.
 (b) Z est réel si et seulement si $\text{Im}(Z) = 0$, soit $2x + 3y - 6 = 0$. L'ensemble (D) est la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$; elle passe par les points de coordonnées $(3, 0)$ et $(0, 2)$.
 (c) Z est imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}(Z) = 0$, soit $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$, c'est-à-dire $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$. L'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega(\frac{3}{2}, 1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$. (Remarque : (Γ) passe par O et par le point A d'affixe a , car $9 + 4 - 9 - 4 = 0$; c'est le cercle de diamètre $[PQ]$ avec $P(3, 0)$ et $Q(0, 2)$.)

Fonctions logarithmiques et primitives

Solution 2.

- (a) L'équation est définie si $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 1$. Pour $x > 1$: $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln((x - 1)(x + 2))$ et $2 \ln 2 = \ln 4$. L'équation équivaut à $(x - 1)(x + 2) = 4$, soit $x^2 + x - 6 = 0$, dont les racines sont $x = 2$ et $x = -3$ (car $\Delta = 1 + 24 = 25$). Seule $x = 2$ vérifie $x > 1$: $S = \{2\}$.
 (b) L'inéquation est définie pour $x > 0$. On pose $X = \ln x$: $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2) \leq 0$ si et seulement si $1 \leq X \leq 2$. Donc $1 \leq \ln x \leq 2$, soit, par croissance stricte de l'exponentielle, $e \leq x \leq e^2$. $S = [e, e^2]$.
- (a) Le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$: il est strictement positif sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1 > 0$, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont $F(x) = \ln(x^2 + x + 1) + c$. $F(0) = \ln 1 + c = c = 1$, donc $F(x) = \ln(x^2 + x + 1) + 1$.
 (b) $g(x) = \frac{1}{x} \times (\ln x)^2$ est de la forme $u' u^2$ avec $u(x) = \ln x$. Une primitive est $G(x) = \frac{(\ln x)^3}{3}$.
 (c) $h(x) = x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} \times (-2x) e^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2} u' e^u$ avec $u(x) = -x^2$. Une primitive est $K(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$.

Suites numériques

Solution 3.

- $u_1 = \sqrt{e \times 1} = e^{\frac{1}{2}}$ et $u_2 = \sqrt{e \times e^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{e^{\frac{3}{2}}} = e^{\frac{3}{4}}$.
- Initialisation** : $u_0 = 1 > 0$. **Hérédité** : si $u_n > 0$, alors $eu_n > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{eu_n} > 0$.
Conclusion : $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Comme $u_n > 0$, $v_n = \ln(u_n)$ est bien défini. $v_{n+1} = \ln(\sqrt{eu_n}) = \frac{1}{2} \ln(eu_n) = \frac{1}{2}(\ln e + \ln u_n) = \frac{1}{2}(1 + v_n) = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}$.
- $w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(v_n - 1) = \frac{1}{2}w_n$. La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = \ln 1 - 1 = -1$.
- $w_n = w_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $v_n = 1 + w_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et $u_n = e^{v_n} = e^{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$. (Vérification : $u_1 = e^{\frac{1}{2}}$ et $u_2 = e^{\frac{3}{4}}$.) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, donc $v_n \rightarrow 1$ et, par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^1 = e$.
- $v_{n+1} - v_n = w_{n+1} - w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$: (v_n) est strictement croissante, et comme l'exponentielle est strictement croissante, $u_{n+1} = e^{v_{n+1}} > e^{v_n} = u_n$: (u_n) est croissante. De plus $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ donne $v_n < 1$, donc $u_n = e^{v_n} < e^1 = e$: (u_n) est majorée par e .

Problème d'analyse

Solution 4.

Partie A.

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x + 1 > 0$ pour tout x . Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $g(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$. Comme g est strictement croissante et s'annule en 0 : $g(x) < 0$ pour $x < 0$, $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$ pour $x > 0$.

Partie B.

- (a) $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$. Comme $x + 1 \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
(b) $f(x) = x(1 - e^{-x}) + 1$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $1 - e^{-x} \rightarrow -\infty$. Le produit $x(1 - e^{-x})$ est le produit de deux quantités qui tendent vers $-\infty$, donc il tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- (a) $f(x) - (x + 1) = -xe^{-x}$, et d'après 1(a), $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$. Donc la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
(b) Le signe de $f(x) - (x + 1) = -xe^{-x}$ est celui de $-x$ car $e^{-x} > 0$. Sur $] -\infty, 0[$, $f(x) - (x + 1) > 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D) ; sur $]0, +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (D) ; les deux se coupent au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point $(0, 1)$.
- Pour $x \neq 0$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, la courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions dérivables) et, avec $(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$: $f'(x) = 1 - (e^{-x} - xe^{-x}) = 1 - e^{-x} + xe^{-x}$. Or $e^{-x}g(x) = e^{-x}(e^x + x - 1) = 1 + xe^{-x} - e^{-x}$. Donc $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
(b) Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ (partie A) : $f'(x) < 0$ sur $] -\infty, 0[$, $f'(0) =$

- 0 et $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un minimum en 0 égal à $f(0) = 1$. Les limites aux bornes valent $+\infty$ (question 1).
5. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$: la tangente (T) est horizontale, d'équation $y = 1$.
6. (a) Sur $] -\infty, 0]$, f est continue et strictement décroissante, et $f(]-\infty, 0]) = [1, +\infty[$ car $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Comme $2 \in [1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $] -\infty, 0]$, et $\alpha \neq 0$ car $f(0) = 1 \neq 2$: donc $\alpha < 0$. De même, sur $[0, +\infty[$, f est continue et strictement croissante avec $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$: l'équation admet une unique solution β dans $[0, +\infty[$, et $\beta > 0$. Au total, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions $\alpha < 0 < \beta$.
- (b) $f(1,3) = 2,3 - 1,3e^{-1,3} \approx 2,3 - 1,3 \times 0,2725 \approx 1,946 < 2$ et $f(1,4) = 2,4 - 1,4e^{-1,4} \approx 2,4 - 1,4 \times 0,2466 \approx 2,055 > 2$. Comme f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient $1,3 < \beta < 1,4$.
7. Tracé : la courbe décroît de $+\infty$ jusqu'au minimum $(0,1)$ où elle admet la tangente horizontale (T), puis croît vers $+\infty$; elle est au-dessus de (D) pour $x < 0$, au-dessous pour $x > 0$, et se rapproche de (D) en $+\infty$; en $-\infty$ elle « monte » verticalement (branche parabolique). Les points d'ordonnée 2 ont pour abscisses $\alpha \approx -0,8$ et $\beta \approx 1,35$.

Partie C.

1. H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H'(x) = -e^{-x} - (x+1)(-e^{-x}) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x}$. Donc H est une primitive de $x \rightarrow xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Les primitives de $f : x \rightarrow x + 1 - xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - H(x) + c = \frac{x^2}{2} + x + (x+1)e^{-x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. $F(0) = 0 + 0 + 1 + c = 0$ donne $c = -1$. Donc $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + (x+1)e^{-x} - 1$.